

Άσκηση

Ένα τεστ IQ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο όρο το 100 και διακύμανση 49. Ποιό πρέπει να είναι το σκορ για να ανήκει κάποιος στο εξυπνότερο 10% , 5% και 1% του πληθυσμού;

Λύση

(Με Z συμβολίζεται η κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά ίση με 1.)

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στους βαθμούς και x_0 το σκορ που πρέπει να πετύχει ένας υποψήφιος για να ανήκει στο εξυπνότερο 10% του πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να πετύχει κάποιος βαθμό μεγαλύτερο από x_0 είναι ίση με 0,1.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}P(X \geq x_0) = 0,1 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x_0 - 100}{7}\right) = 0,1 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{x_0 - 100}{7}\right) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x_0 - 100}{7}\right) = 0,9 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{x_0 - 100}{7} = 1,28 \Leftrightarrow x_0 - 100 = 8,96 \Leftrightarrow x_0 = 108,96\end{aligned}$$

Άρα, ένας υποψήφιος πρέπει να πετύχει περίπου 109 βαθμούς για να ανήκει στο εξυπνότερο 10% του πληθυσμού.

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία, έστω y_0 το σκορ που πρέπει να πετύχει ένας υποψήφιος για να ανήκει στο εξυπνότερο 5% του πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να πετύχει κάποιος βαθμό μεγαλύτερο από y_0 είναι ίση με 0,05.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}P(X \geq y_0) = 0,05 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{y_0 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{y_0 - 100}{7}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{y_0 - 100}{7}\right) = 0,05 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{y_0 - 100}{7}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{y_0 - 100}{7} = 1,64 \Leftrightarrow y_0 - 100 = 11,48 \Leftrightarrow y_0 = 111,48\end{aligned}$$

Άρα, ένας υποψήφιος πρέπει να πετύχει περίπου 112 βαθμούς για να ανήκει στο εξυπνότερο 5% του πληθυσμού.

Όμοια, έστω t_0 το σκορ που πρέπει να πετύχει ένας υποψήφιος για να ανήκει στο εξυπνότερο 1% του πληθυσμού. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να πετύχει κάποιος βαθμό μεγαλύτερο από t_0 είναι ίση με 0,01.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
P(X \geq t_0) = 0,01 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{t_0 - \mu}{\sigma}\right) = 0,01 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{t_0 - 100}{7}\right) = 0,01 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{t_0 - 100}{7}\right) = 0,01 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{t_0 - 100}{7}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{t_0 - 100}{7} = 2,32 \Leftrightarrow t_0 - 100 = 16,24 \Leftrightarrow t_0 = 116,24
\end{aligned}$$

Άρα, ένας υποψήφιος πρέπει να πετύχει περίπου 117 βαθμούς για να ανήκει στο εξυπνότερο 1% του πληθυσμού.

Η διαδικασία που περιγράψαμε μπορεί να ακολουθηθεί και αντίστροφα, για παράδειγμα εάν γνωρίζουμε ότι ένας υποψήφιος πέτυχε 105 βαθμούς μπορούμε να βρούμε τη θέση του στο σύνολο του πληθυσμού:

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στους βαθμούς. Ζητάμε ποιο ποσοστό του πληθυσμού πέτυχε πάνω από 105 βαθμούς. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 105) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{105 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{105 - 100}{7}\right) = P(Z \geq 0,714) = \\
&= 1 - P(Z \leq 0,714) = 1 - 0,57 = 0,43
\end{aligned}$$

Άρα, ένας υποψήφιος που πέτυχε 105 βαθμούς ανήκει στο εξυπνότερο 43% του πληθυσμού.