ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΕΞΑΜΗΝΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΤΕΙ ΠΑΤΡΩΝ

Απλός Τόκος

Εφαρμόζεται στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις, συνήθως μέχρι τριών μηνών ή το πολύ μέχρι ενός έτους.

Στον απλό τόκο τα ποσά του Κεφαλαίου και του Τόκου σε όλη την παραγωγική διαδικασία παραμένουν σταθερά.

Συμβολισμοί

K→ Κεφάλαιο
I → Τόκος
i → Επιτόκιο και είναι ο τόκος του Κεφαλαίου μιας νομισματικής μονάδας σε μια χρονική περίοδο ή ο τόκος Κεφαλαίου 100 νομισματικών μονάδων σε μια χρονική περίοδο
n → χρόνος, αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται το <u>έτος</u>
μ → χρόνος, αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται ο <u>μήνας</u>
ν → χρόνος, αν ως μονάδα μέτρησης του χρόνου λαμβάνεται η <u>μέρα</u>

Για τον υπολογισμό του απλού τόκου διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, εξάμηνα και τρίμηνα

$$I = Kni$$

Παρατήρηση

Στην εφαρμογή του τύπου θα πρέπει ο χρόνος και το επιτόκιο να αναφέρονται στην ίδια μονάδα χρόνου. Δηλαδή, αν το επιτόκιο είναι ετήσιο, ο χρόνος θα είναι σε έτη. Αν το επιτόκιο είναι σε εξάμηνα το n θα είναι σε εξάμηνα κ.ο.κ.

Εφαρμογές

Α. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το έτος

Β. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το εξάμηνο

Γ. Όταν περίοδος παραγωγής τόκου είναι το τρίμηνο

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες

$$I = \frac{K\mu i}{12}$$

$\mu \rightarrow$ αριθμός μηνών που έχει τοκιστεί το Κεφάλαιο

Υπολογισμός του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε μέρες

$$I = \frac{K\nu i}{360}$$

Μικτό ή Εμπορικό Έτος

$$I = \frac{K\nu i}{365}$$

Πολιτικό Έτος

Πολιτικό Έτος

Εδώ θεωρούμε ότι κάθε μήνας περιλαμβάνει τον πραγματικό αριθμό των ημερών του και ότι το έτος αποτελείται από 365 μέρες ή 366 αν είναι δίσεκτο

Μικτό Έτος

Εδώ θεωρούμε ότι το έτος έχει 360 μέρες και κάθε μήνας λαμβάνεται με τις πραγματικές του μέρες

Εμπορικό Έτος

Εδώ θεωρούμε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 μέρες και το έτος αποτελείται από 360 μέρες

Παρατήρηση

Για τον υπολογισμό των **τοκοφόρων ημερών** πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής:

1. Μέρα Κατάθεσης χρημάτων σε μια τράπεζα ή σε ένα ταχυδρομικό ταμιευτήριο δεν είναι τοκοφόρος ενώ ημέρα ανάληψης είναι τοκοφόρος
2. Κάθε ποσό που χορηγείται από τράπεζα δίνει τόκο από την ημέρα που έχει χορηγηθεί το δάνειο, ο δε αριθμός των τοκοφόρων ημερών που υπολογίζεται με μια μόνο αφαίρεση

Τελική Αξία

$$K_\tau = K_o + I$$

$$K_n = K_o + K_o ni = K_o(1+ni)$$

$$K_\mu = K_o + \frac{K_o \mu i}{12} = K_o(1+\frac{\mu i}{12})$$

$$K_\nu = K_o + \frac{K_o \nu i}{360} = K_o(1+\frac{\nu i}{360})$$

$$K_\nu = K_o + \frac{K_o \nu i}{365} = K_o(1+\frac{\nu i}{365})$$

Παρατήρηση

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι δυνατόν να υπολογισθεί ένα από τα ποσά K, ν, μ, n, i όταν δίνονται τα δυο αλλά και ο τόκος, αρκεί οι παραπάνω τύποι να λυθούν ως προς καθένα από τα ποσά K, ν, μ, n, i

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο του Σταθερού Διαιρέτη και του Τοκάριθμου

$$I = \frac{K\nu}{\Delta} = \frac{\mathrm{N}}{\Delta}$$

Όπου

$N = K\nu \rightarrow$ **Τοκάριθμος**

$\Delta = \dfrac{360}{i} \rightarrow$ **Σταθερός Διαιρέτης για Μικτό ή Εμπορικό Έτος**

$\Delta = \dfrac{365}{i} \rightarrow$ **Σταθερός Διαιρέτης για Πολιτικό Έτος**

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο των σταθερών πολλαπλασιαστών

$I = K\nu\Pi = \mathrm{N}\Pi$ **όπου** $\Pi = \dfrac{360}{i}$ ή $\Pi = \dfrac{365}{i}$

Υπολογισμός του απλού τόκου με τη μέθοδο ανάλυσης του Κεφαλαίου, του Χρόνου και του Επιτοκίου σε μέρη ανάλογα

Με ανάλυση του Κεφαλαίου

Από τον τύπο $I = \frac{K\nu}{\Delta}$ προκύπτει ότι

- Αν $K = \Delta \Rightarrow I = \nu$. Δηλαδή, αν K ίσο με το σταθερό διαιρέτη τότε ο τόκος ισούται με τον αριθμό των ημερών
- Αν $K \neq \Delta$ τότε προσπαθούμε να αναλύσουμε το Κεφάλαιο σε μέρη ανάλογα προς το σταθερό διαιρέτη

Με ανάλυση του χρόνου

- Αν $\nu = \frac{\Delta}{100} \Rightarrow I = \frac{K}{100}$
- Αν $\nu \neq \frac{\Delta}{100}$ τότε μερίζουμε το ν σε μέρη ανάλογα του $\frac{\Delta}{100}$

Με ανάλυση του επιτοκίου

Αν το επιτόκιο είναι τέτοιο ώστε να μη μας διευκολύνει στις πράξεις, διαλέγουμε ένα βοηθητικό επιτόκιο που μας διευκολύνει στις πράξεις και έπειτα με τη μέθοδο των ανάλογων μερών βρίσκουμε και τον τόκο με το ζητούμενο επιτόκιο

Υπολογισμός του Κεφαλαίου στον Απλό Τόκο

$$K = \frac{I}{ni}$$

$$K = \frac{12I}{\mu i}$$

$$K = \frac{360I}{\nu i} \text{ ή } K = \frac{365I}{\nu i} \text{ ή } K = \frac{\Delta I}{\nu}$$

Υπολογισμός του Χρόνου στον Απλό Τόκο

$$n = \frac{I}{Ki}$$

$$\mu = \frac{12I}{Ki}$$

$$\nu = \frac{360I}{Ki} \text{ ή } \nu = \frac{365I}{Ki} \text{ ή } \nu = \frac{\Delta I}{K}$$

Υπολογισμός του Επιτοκίου στον Απλό Τόκο

$$i = \frac{I}{Kn}$$

$$i = \frac{12I}{K\mu}$$

$$i = \frac{360I}{K\nu} \text{ ή } i = \frac{365I}{K\nu}$$

Εύρεση του Αρχικού Κεφαλαίου σε συνάρτηση της Τελικής αξίας

$$K_o = \frac{K_n}{1+ni}$$

$$K_o = \frac{12K_\mu}{1+\mu i}$$

$$K_o = \frac{360K_\nu}{360+\nu i} \text{ ή } K_o = \frac{365K_\nu}{365+\nu i} \text{ ή } K_o = \frac{\Delta K_\nu}{\Delta+\nu}$$

Παρατήρηση

Τα προβλήματα υπολογισμού αρχικής αξίας σε συνάρτηση με την τελική αξία λύνονται και με τη χρήση βοηθητικού κεφαλαίου

Υπολογισμός του Συνολικού Απλού Τόκου πολλών Κεφαλαίων με το ίδιο Επιτόκιο

$$I = I_1 + \ldots + I_\mu = \frac{K_1 \nu_1 + \ldots + K_\mu \nu_\mu}{\Delta} = \frac{\mathrm{N}_1 + \ldots + \mathrm{N}_\mu}{\Delta}$$

Προβλήματα που δίνεται το ελαττωμένο κατά τον τόκο Κεφάλαιο

Πολλές φορές στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές συναλλαγές, ο δανειστής μπορεί να κρατήσει προκαταβολικά τον τόκο του Κεφαλαίου που δάνεισε, οπότε ο δανειζόμενος θα λάβει το δάνειο ελαττωμένο κατά τον τόκο του. Επομένως ελαττωμένο κατά τον τόκο κεφάλαιο είναι το ποσό που μένει αν από κάποιο κεφάλαιο αφαιρεθεί ο τόκος του για ορισμένο χρονικό διάστημα.

$K_o \rightarrow$ Αρχικό Κεφάλαιο που θέλουμε να υπολογίσουμε σε συνάρτηση του ελαττωμένου Κεφαλαίου

$$K = K_o - \frac{K_o \Delta}{\Delta - \nu} \Rightarrow K_o = \frac{K\Delta}{\Delta - \nu}$$

Παρατήρηση

Στην περίπτωση του ελαττωμένου Κεφαλαίου μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του βοηθητικού Κεφαλαίου, όπως και στην περίπτωση του αυξημένου

Εύρεση του Μέσου Επιτοκίου διαφόρων Κεφαλαίων

Μέσο Επιτόκιο καλείται το επιτόκιο με το οποίο πρέπει να τοκίσουμε διάφορα Κεφάλαια, για διάφορους χρόνους, ώστε να πάρουμε τον ίδιο συνολικό τόκο που θα παίρναμε, αν τοκίζαμε τα ίδια Κεφάλαια στους ίδιους χρόνους αλλά με διαφορετικά επιτόκια

Συμβολισμός $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{K_1 \nu_1 i_1 + \ldots + K_\mu \nu_\mu i_\mu}{K_1 \nu_1 + \ldots + K_\mu \nu_\mu} = \frac{\mathrm{N}_1 i_1 + \ldots + \mathrm{N}_\mu i_\mu}{\mathrm{N}_1 + \ldots + \mathrm{N}_\mu}$$

Ειδικές Περιπτώσεις

1. Αν ίσα Κεφάλαια τοκίζονται σε ίσα χρονικά διαστήματα , το μέσο επιτόκιο ισούται με τον αριθμητικό μέσο των δοθέντων επιτοκίων

$$\overline{x} = \frac{i_1 + \ldots + i_\mu}{\mu}$$

2. Αν διαφορετικά Κεφάλαια τοκίζονται σε ίσα χρονικά διαστήματα τότε

$$\overline{x} = \frac{K_1 i_1 + \ldots + K_\mu i_\mu}{K_1 + \ldots + K_\mu}$$

3. Αν ίσα Κεφάλαια τοκίζονται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα τότε

$$\overline{x} = \frac{\nu_1 i_1 + \ldots + \nu_\mu i_\mu}{\nu_1 + \ldots + \nu_\mu}$$

Προεξόφληση σε Απλό Τόκο

Γραμμάτιο, Συναλλαγματική → πιστωτικοί τίτλοι που αντικαθιστούν χαρτονομίσματα. Είναι έντυπα που συμπληρώνονται με τα στοιχεία του οφειλέτη και του δανειστή και κάποια άλλα στοιχεία.

Βασική Διαφορά μεταξύ των δυο παραπάνω πιστωτικών τίτλων είναι ότι το γραμμάτιο σε διαταγή αποτελεί υπόσχεση του οφειλέτη προς τον πιστωτή και αναγράφει «Με το παρόν γραμμάτιο σε διαταγή υπόσχομαι και υποχρεούμαι να πληρώσω σε διαταγή του τάδε στο κατάστημα…. Το ποσό Χ». Ενώ η συναλλαγματική αποτελεί εντολή του εκδότη προς τον οφειλέτη να πληρώσει ορισμένο χρηματικό ποσό σε ορισμένο τόπο και χρόνο και αναγράφει «Με την παρούσα και μόνη συναλλαγματική πληρώστε σε διαταγή του τάδε ή σε διαταγή εμένα του ιδίου…»

Από μαθηματικής άποψης δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε συναλλαγματική και γραμμάτιο.

Βασικοί Ορισμοί

Δικαιούχος ή Κομιστής εκείνος που έχει στη κατοχή του το γραμμάτιο ή την συναλλαγματική και δικαιούται να εισπράξει το αναγραφόμενο ποσό.

Ονομαστική Αξία (Κ) του γραμματίου ή της συναλλαγματικής καλείται το ποσό που αναγράφεται στο γραμμάτιο ή στην συναλλαγματική.

Παρατήρηση

Στην ονομαστική αξία εκτός από το ποσό αναγράφεται και ο τόκος που έχει συμφωνηθεί. Η πληρωμή της συναλλαγματικής γίνεται την ημερομηνία λήξης ή μέχρι την $2^{η}$ εργάσιμη μέρα μετά την ημερομηνία λήξης.

Λήξη που πρέπει να πληρωθεί το ποσό.

Ορισμός

Η πράξη με την οποία μεταβιβάζεται η συναλλαγματική σε μια τράπεζα και εισπράττεται από τον κομιστή η παρούσα αξία καλείται **προεξόφληση** (η οποία είναι κυρίως έργο των τραπεζών)

Ορισμός

Το μειωμένο-εισπραττόμενο ποσό που θα εισπράξει ο κομιστής του τίτλου με την εξόφληση μιας συναλλαγματικής πριν από τη λήξη της καλείται **παρούσα αξία ή πραγματική αξία Α** και είναι πάντοτε μικρότερη από την ονομαστική αξία.

Ορισμός

Προεξόφλημα ή Υφαίρεση καλείται η διαφορά μεταξύ ονομαστικής και παρούσας αξίας και είναι το ποσό που παρακρατεί η τράπεζα ως τόκο κατά την πράξη της προεξόφλησης.

Ορισμός

Χρόνος Προεξόφλησης καλείται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την ημέρα της προεξόφλησης ενός τίτλου μέχρι την ημέρα που λήγει η συναλλαγματική ή το γραμμάτιο.

Ορισμός

Το επιτόκιο με το οποίο υπολογίζεται το προεξόφλημα καλείται **επιτόκιο προεξόφλησης** είναι δηλ. το επιτόκιο με το οποίο υπολογίζει η τράπεζα τον τόκο των χρημάτων της κατά την προεξόφληση

Ορισμός

Εξωτερικό Προεξόφλημα καλείται το προεξόφλημα που υπολογίζεται ως ο τόκος επί της ονομαστικής αξίας από την ημέρα της προεξόφλησης μέχρι την ημέρα της λήξης της συναλλαγματικής.

Ορισμός

Ενώ **Εσωτερικό Προεξόφλημα** όταν υπολογίζεται επί της παρούσας αξίας.

Ορισμός

Αν λάβουμε ως **Κεφάλαιο** για τον υπολογισμό του τόκου την **ονομαστική αξία**, τότε η **προεξόφληση καλείται εξωτερική** , ενώ αν λάβουμε ως **Κεφάλαιο την παρούσα αξία**, τότε η **προεξόφληση καλείται εσωτερική.**

Παρατήρηση

Το εξωτερικό προεξόφλημα είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το εσωτερικό.

Συμβολισμοί

$K \rightarrow$ Ονομαστική Αξία

$A \rightarrow$ Παρούσα Αξία Εξωτερικής Προεξόφλησης

$E \rightarrow$ Εξωτερικό Προεξόφλημα

$E_1 \rightarrow$ Εσωτερικό Προεξόφλημα

$A_1 \rightarrow$ Παρούσα Αξία Εσωτερικής Προεξόφλησης

Τότε, ισχύουν

$$A = K - E$$

$$A_1 = K - E_1$$

Ονομαστική Αξία = Παρούσα Αξία + Προεξόφλημα

Παρατήρηση

Σχετικά με τον τρόπο υπολογισμού των τοκοφόρων ημερών στην προεξόφληση, οι τράπεζες υπολογίζουν συνήθως ως **τοκοφόρες μέρες** την ημέρα που γίνεται η προεξόφληση, την ημέρα που λήγει η συναλλαγματική ή το γραμμάτιο, τις μέρες που παρεμβάλλονται μεταξύ της ημέρας της προεξόφλησης και της ημέρας λήξης και επιπλέον δυο εργάσιμες μέρες μετά τη λήξη.

Παρατήρηση

Κατά την προεξόφληση οι τράπεζες εκτός από το προεξόφλημα κρατούν τις περισσότερες φορές και διάφορα άλλα ποσά, όπως προμήθεια, ταχυδρομικά, τηλεφωνική έξοδα, εισπρακτικά, ειδικό φόρο τραπεζικών εργασιών και το νόμο χαρτόσημο.

Επομένως έχουμε Προεξόφληση χωρίς έξοδα και Προεξόφληση με έξοδα.

Προεξόφληση χωρίς Έξοδα

Προσδιορισμός του Προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Εξωτερική Προεξόφληση

$$E = Kni$$

$$E = \frac{K\mu i}{12}$$

$$E = \frac{K\nu i}{360(365)} \text{ ή } E = \frac{K\nu}{\Delta}$$

Εσωτερική Προεξόφληση

$$E_1 = \frac{K\nu}{\Delta + \nu} \text{ ή } E_1 = \frac{K\nu i}{360(365) + \nu i}$$

$$E_1 = \frac{K\mu i}{12 + \mu i}$$

$$E_1 = \frac{Kni}{1 + ni}$$

Διαφορά των δυο Προεξοφλημάτων

$$E - E_1 = \frac{K\nu^2}{\Delta(\Delta + \nu)}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξωτερικό προεξόφλημα του εσωτερικού προεξοφλήματος, ως ακολούθως:

$$E - E_1 = E_1 \frac{\nu}{\Delta}$$

Και

Ως εσωτερικό προεξόφλημα του εξωτερικού προεξοφλήματος, ως ακολούθως:

$$E - E_1 = E \frac{\nu}{\Delta + \nu}$$

Πραγματικό Επιτόκιο Προεξόφλησης

Εάν ο κομιστής της συναλλαγματικής που έκανε την προεξόφληση και έλαβε ποσό Α ή A_1 θελήσει να έχει στη λήξη της συναλλαγματικής ποσό Κ, όσο η ονομαστική της αξίας, θα πρέπει να τοκίσει τα χρήματα Α ή A_1 με ένα επιτόκιο τέτοιο ώστε για χρονικό διάστημα ν να λάβει τόκο τόσο ποσό όσο κράτησε η τράπεζα ως προεξόφλημα. Το επιτόκιο αυτό καλείται **πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης**, συμβολίζεται με t και είναι πάντοτε μεγαλύτερο του επιτοκίου προεξόφλησης. Μόνο στην περίπτωση της εσωτερικής προεξόφλησης χωρίς έξοδα $i = t$

$$t = \frac{360(K - A)}{A\nu} \text{ ή } t = \frac{365(K - A)}{A\nu}$$

Προσδιορισμός του Προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

Εξωτερική Προεξόφληση

$$E = \frac{A\nu}{\Delta - \nu} \text{ ή } E = \frac{A\nu i}{360(365) - \nu i}$$

$$E = \frac{A\mu i}{12 - \mu i}$$

Εσωτερική Προεξόφληση

$$E_1 = \frac{A_1\nu}{\Delta} \text{ ή } E_1 = \frac{A_1\nu i}{360(365)}$$

$$E_1 = \frac{A_1\mu i}{12}$$

$$E_1 = A_1 ni$$

Προσδιορισμός της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Εξωτερική Προεξόφληση

$$A = \frac{K(\Delta - \nu)}{\Delta}$$

Εσωτερική Προεξόφληση

$$A_1 = \frac{K\Delta}{\Delta + \nu}$$

Προσδιορισμός της ονομαστικής αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

Εξωτερική Προεξόφληση

$$K = \frac{A\Delta}{\Delta - \nu}$$

Εσωτερική Προεξόφληση

$$K = \frac{A_1(\Delta + \nu)}{\Delta}$$

Προσδιορισμός του χρόνου και του επιτοκίου στην προεξόφληση

Εξωτερική Προεξόφληση

$$i = \frac{360(365)E}{K\nu}$$

Εσωτερική Προεξόφληση

$$i = \frac{360(365)E_1}{A_1\nu}$$

Συνολικό Προεξόφλημα και Συνολική Παρούσα Αξία χωρίς Έξοδα

$$E = \frac{K_1\nu_1 + ... + K_\mu\nu_\mu}{\Delta}$$

Παρατήρηση

Για να βρούμε τη συνολική παρούσα αξία εξωτερικά , πρέπει να αφαιρέσουμε το συνολικό προεξόφλημα από το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των συναλλαγματικών

Προεξόφληση με έξοδα

π → προμήθεια και υπολογίζεται συνήθως σε 1% το έτος επί της ονομαστικής αξίας για κάθε μήνα και ολόκληρο το μήνα ή όπως καλείται «κατά μήνα αδιαίρετο». Δηλ. το κλάσμα του μήνα λαμβάνεται ως ολόκληρος μήνας.

$$\pi = K\frac{\mu}{12}\frac{1}{100}$$

ε → εισπρακτικά έξοδα και το ποσοστό τους είναι συνήθως 3 ‰ κατά χιλιάδα και ολόκληρη χιλιάδα

τ → ταχυδρομικά έξοδα και υπολογίζονται με έναν ακέραιο ποσό, ανάλογα με τον τόπο πληρωμής της συν/κής

φ → Ε.Φ.Τ.Ε ειδικός φόρος τραπεζικών εργασιών και ανέρχεται σε ένα ποσοστό της τάξεως 3% του αθροίσματος του προεξοφλήματος, της προμήθειας, των εισπρακτικών και των ταχυδρομικών εξόδων

Το συνολικό ποσό που παρακρατεί η τράπεζα όταν η προεξόφληση περιέχει και έξοδα λέγεται **σύνθετο προεξόφλημα** και διακρίνεται σε εξωτερικό και εσωτερικό ($E+\pi+\tau+\varepsilon+\varphi,\ E_1+\pi+\tau+\varepsilon+\varphi$)

Πραγματικό Επιτόκιο Προεξόφλησης

Είναι ο ίδιος τύπος που όπου $A = K - (E+\pi+\tau+\varepsilon+\varphi)$

Ισοδύναμα Γραμμάτια

Πολλές φορές εμφανίζεται το φαινόμενο πολλοί πιστωτικοί τίτλοι που έχουν το ίδιο επιτόκιο και λήγουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές να αντικαθίστανται από μια ενιαία συναλλαγματική που θα λήγει έστω μετά από ν μέρες και με το ίδιο επιτόκιο και αντίστροφα η αντικατάσταση μιας συν/κής από πολλές άλλες συν/κές του ιδίου όμως επιτοκίου.

Η αντικατάσταση αυτή οφείλεται στην οικονομική ισοδυναμία δηλ. θα αντικατασταθούν οι πολλές συν/κές από μια και αντίστροφα χωρίς κέρδη ή ζημιά.

Για να υπάρχει **οικονομική ισοδυναμία** θα πρέπει την ίδια χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο *η παρούσα αξία της συν/κής που θα αντικαταστήσει τις άλλες να είναι ίση με το άθροισμα των παρουσών αξιών των συν/κών που αντικαθίστανται.* Η χρονική στιγμή κατά την οποία εξισώνονται οι παρούσες αξίες ονομάζεται **εποχή ισοδυναμίας**.

Ως Εποχή ή Μέρα Ισοδυναμίας μπορεί να θεωρηθεί:

1. **Ημέρα Υπολογισμού** δηλ. η μέρα που οι ενδιαφερόμενοι συμφώνησαν να αντικαταστήσουν τις συν/κές
2. **Μέρα** κατά την οποία λήγει η συν/κή που αντικαθιστά τις άλλες και καλείται **κοινή λήξη.**
3. **Οποιαδήποτε μέρα** ισοδυναμίας μπορεί να καθοριστεί από τους ενδιαφερόμενους.(**Τυχούσα Μέρα**)

Συμβολισμοί

$K_1, K_2, ..., K_\mu \rightarrow$ ονομαστικές αξίες των συν/κών

$\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\mu \rightarrow$ μέρες λήξης των συν/κών

$i \rightarrow$ ίδιο επιτόκιο

$K \rightarrow$ η συν/κή που πρόκειται να αντικατάστησει αυτές με το ίδιο επιτόκιο

Σχέση που ισχύει

$$\Pi\alpha\rho o\acute{\upsilon}\sigma\alpha\ \mathrm{A}\xi\acute{\iota}\alpha\ K = \Pi\alpha\rho o\acute{\upsilon}\sigma\alpha\ \mathrm{A}\xi\acute{\iota}\alpha\ K_1 + ... + \Pi\alpha\rho o\acute{\upsilon}\sigma\alpha\ \mathrm{A}\xi\acute{\iota}\alpha\ K_\mu$$

Παρατήρηση

Κάποια από τα συνηθισμένα προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη μελέτη των ισοδύναμων γραμματίων είναι:

1. Ποια είναι η ονομαστική αξία της συν/κής που αντικαθιστά τις άλλες
2. Πότε λήγει η συν/κή που αντικαθιστά άλλες δηλ. ποια είναι η κοινή λήξη
3. Ποιο είναι το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η αντικατάσταση
4. Ποια είναι η ονομαστική αξία ή η λήξη καθεμίας από τις αντικαθιστάμενες συν/κές
5. Ποια η μέση λήξη
6. Ειδικές περιπτώσεις

Παρακάτω θα δοθούν οι τύποι που ισχύουν ανάλογα με την περίπτωση που έχουμε και ανάλογα με το τι ζητείται σχηματίζεται η κατάλληλη εξίσωση.

Α. Εποχή Ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού

α. Εξωτερική Προεξόφληση

$$K - E = K_1 - E_1 + \ldots + K - E_\mu$$

$$K - \frac{K\nu}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1\nu_1}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu \nu_\mu}{\Delta}$$

β .Εσωτερική Προεξόφληση.

$$K - \frac{K\nu}{\Delta + \nu} = K_1 - \frac{K_1\nu_1}{\Delta + \nu_1} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu \nu_\mu}{\Delta + \nu_\mu}$$

Παρατήρηση

Στα ισοδύναμα γραμμάτια η μέρα ισοδυναμίας δεν λογίζεται ως τοκοφόρα ενώ η μέρα λήξης της συν/κής λογίζεται ως τοκοφόρα

Β. Εποχή Ισοδυναμίας η Κοινή Λήξη

α. Εξωτερική Προεξόφληση

$$K = K_1 - \frac{K_1(\nu_1 - \nu)}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(\nu_\mu - \nu)}{\Delta}$$

β .Εσωτερική Προεξόφληση.

$$K = K_1 - \frac{K_1(\nu_1 - \nu)}{\Delta + (\nu_1 - \nu)} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(\nu_\mu - \nu)}{\Delta + (\nu_\mu - \nu)}$$

Γ. Εποχή Ισοδυναμίας η τυχούσα μέρα ρ

α. Εξωτερική Προεξόφληση

$$K - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1(\nu_1 - \rho)}{\Delta} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(\nu_\mu - \rho)}{\Delta}$$

β .Εσωτερική Προεξόφληση.

$$K - \frac{K(\nu - \rho)}{\Delta + (\nu - \rho)} = K_1 - \frac{K_1(\nu_1 - \rho)}{\Delta + (\nu_1 - \rho)} + \ldots + K_\mu - \frac{K_\mu(\nu_\mu - \rho)}{\Delta + (\nu_\mu - \rho)}$$

Μέση Λήξη

Ορισμός

Μέση Λήξη καλείται η κοινή λήξη της ενιαίας συν/κής που αντικαθιστά άλλες και της οποίας η ονομαστική αξία ισούται με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των αντικαθιστάμενων συν/κών

Δηλ. ισχύει

$$K = K_1 + \ldots + K_\mu$$

Για την εύρεση της μέσης λήξης θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που μας δίνουν την κοινή λήξη, επειδή η εποχή ισοδυναμίας είναι αδιάφορη λαμβάνουμε ως εποχή ισοδυναμίας την ημέρα υπολογισμού.

Οπότε από τους αντίστοιχους τύπους που ισχύουν προκύπτουν:

Α. Εξωτερική Προεξόφληση

$$\nu = \frac{K_1\nu_1 + \ldots + K_\mu \nu_\mu}{K} = \frac{N_1 + \ldots + N_\mu}{K_1 + \ldots + K_\mu}$$

Από τον παραπάνω τύπο προκύπτουν:

1. Η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη του επιτοκίου
2. Αν $K_1 = \ldots . = K_\mu \Rightarrow \nu = \dfrac{\nu_1 + \ldots + \nu_\mu}{\mu}$
3. Η μέση λήξη είναι ανεξάρτητη της μέρας υπολογισμού γιατί ισοδυναμία υπάρχει κάθε στιγμή

β. Εσωτερική Προεξόφληση

$$\nu = \frac{\dfrac{N_1}{\Delta + \nu_1} + \ldots + \dfrac{N_\mu}{\Delta + \nu_\mu}}{\dfrac{K_1}{\Delta + \nu_1} + \ldots + \dfrac{K_\mu}{\Delta + \nu_\mu}}$$

Ανατοκισμός ή Σύνθετος Τόκος

Στις βραχυπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται ο απλός τόκος ενώ στις μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις εφαρμόζεται ο σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός.

Όταν ένα αρχικό Κεφάλαιο τοκίζεται με απλό τόκο για ένα χρονικό διάστημα το Κεφάλαιο και ο Τόκος παραμένουν σταθερά σε όλη τη διάρκεια του δανείου. Ενώ όταν το Κεφάλαιο τοποθετείται σε ανατοκισμό οι τόκοι κεφαλοποιούνται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου και επομένως τόσο ο τόκος όσο και το τοκιζόμενο Κεφάλαιο αυξάνονται κάθε χρονική στιγμή με επιταχυνόμενο ρυθμό.

Ορισμός

Το σύστημα αυτό της κεφαλοποίησης στο οποίο ο τόκος κάθε χρονικής περιόδου αποτελεί παραγωγικό Κεφάλαιο για όλες τις επόμενες χρονικές περιόδους λέγεται ανατοκισμός

Ο συνολικός χρόνος που ένα Κεφάλαιο τοκίζεται με ανατοκισμό λέγεται διάρκεια ανατοκισμού.

Παρατήρηση

Στον ανατοκισμό το Κεφάλαιο αυξάνεται από έτος σε έτος και ό τόκος κάθε περιόδου είναι μεγαλύτερος από τον τόκο της προηγούμενης περιόδου.

Ο χρόνος και το επιτόκιο να αντιστοιχούν προς την περίοδο του ανατοκισμού

Συμβολισμοί

$$K_o \to \text{Α}\rho\chi\iota\kappa\acute{o}\ \text{Κ}\varepsilon\varphi\acute{\alpha}\lambda\alpha\iota o$$
$$i \to \varepsilon\pi\iota\tau\acute{o}\kappa\iota o$$
$$n \to \acute{\varepsilon}\tau\eta$$
$$K_n \to \text{Τ}\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}\ \text{Α}\xi\acute{\iota}\alpha$$

Εύρεση Τελικής Αξίας ενός Κεφαλαίου στον ανατοκισμό όταν ο χρόνος δίνεται σε ακέραιες χρονικές περιόδους

$$K_n = K_o(1+i)^n$$

Εύρεση Τελικής Αξίας ενός Κεφαλαίου στον ανατοκισμό όταν ο χρόνος δίνεται σε μικτό αριθμό χρονικών περιόδων

Αν ο χρόνος είναι μικτός δηλ. αποτελείται από ακέραιες περιόδους και από το τμήμα $\frac{\lambda\mu}{12}$ όπου λ το πλήθος των περιόδων ανατοκισμού σε ένα έτος και μ το πλήθος των μηνών της ακέραιας περιόδου, τότε προς εύρεση του τύπου που δίνει την τελική αξία σε ένα Κεφάλαιο στο τέλος; Των $n+\frac{\lambda\mu}{12}$ χρονικών περιόδων χρησιμοποιούμε μια από τις παρακάτω δυο συνθήκες:

Εκθετική

$$K_{n+\frac{\lambda\mu}{12}} = K_o(1+i)^n(1+i)^{\lambda\mu/12}$$

Γραμμική

$$K_{n+\frac{\lambda\mu}{12}} = K_o(1+i)^n(1+\frac{\lambda\mu}{12}i)$$

Παρατήρηση

Εάν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη, μήνες και μέρες τότε μετατρέπουμε τους μήνες σε μέρες και εφαρμόζουμε τους τύπους:

$$K_{n+\frac{\nu}{360}} = K_o(1+i)^n(1+i)^{\frac{\nu}{360}}$$

$$K_{n+\frac{\nu}{360}} = K_o(1+i)^n(1+\frac{\nu}{360}i)$$

Εύρεση της Αρχικής Αξίας στον Ανατοκισμό

$$K_o = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n U^n$$

Εύρεση του χρόνου στον ανατοκισμό

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_o}$$

Εν συνεχεία από πίνακες για ορισμένο επιτόκιο κοιτάμε σε ποιο χρόνο αντιστοιχεί ο λόγος. Εάν το πηλίκο αυτό δεν αντιστοιχεί με ακρίβεια σε ορισμένο αριθμό ετών τότε ο χρόνος υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή ή λογαριθμίζοντας.

Εύρεση του επιτοκίου στον ανατοκισμό

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_o}$$

Εν συνεχεία από πίνακες για ορισμένο χρόνο κοιτάμε σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί ο λόγος. Εάν το πηλίκο αυτό δεν αντιστοιχεί με ακρίβεια τότε το επιτόκιο υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή.

Ισοδύναμα Επιτόκια

$$i_\mu = (1+i)^{\frac{1}{\mu}} - 1$$

Προεξόφληση στον Ανατοκισμό

$$E = K_n(1-U^n)$$

$$K_o = K_n U^n$$

Ισοδυναμία στον Ανατοκισμό

Εποχή Ισοδυναμίας ημέρα υπολογισμού

$$KU^n = K_1 U^{n_1} + \ldots + K_\mu U^{n_\mu}$$

Εποχή Ισοδυναμίας κοινή λήξη

$$K = K_1 U^{n_1 - n} + \ldots + K_\mu U^{n_\mu - n}$$

Ράντες

Ορισμός

Η σειρά των κεφαλαίων, που καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα για την εξόφληση ενός χρέους ή που κατατίθενται σε ίσα χρονικά διαστήματα για το σχηματισμό μεγάλου κεφαλαίου, καλείται **ράντα**.

Συνεπώς, **ράντα** καλείται η σειρά των κεφαλαίων που καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Ορισμός

Περίοδος ράντας καλείται ο χρόνος που περιέχεται μεταξύ των δυο διαδοχικών καταθέσεων. Από την περίοδο ονομάζεται ετήσια, εξαμηνιαία, τριμηνιαία, κ.ο.κ.

Ορισμός

Όρος ή **Δόση** της ράντας καλείται κάθε χρηματικό ποσό, που καταβάλλεται ή κατατίθεται σε ίσα χρονικά διαστήματα

Ορισμός

Σταθερή ράντα όταν οι όροι της ράντας είναι ίσοι, εάν όχι καλείται μεταβλητή

Ορισμός

Εάν ο όρος της ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου, η ράντα καλείται **ληξιπρόθεσμη** και εάν στην αρχή **προκαταβλητέα**.

Ορισμός

Πρόσκαιρη καλείται η ράντα που το πλήθος των όρων είναι ορισμένο

Ορισμός

Διηνεκής καλείται η ράντα που το πλήθος των όρων είναι άπειρο

Ορισμός

Ράντα ζωής καλείται η ράντα που το πλήθος των όρων εξαρτάται από τη ζωή ενός ατόμου και συνεπώς καταβάλλεται όρος, εφόσον το άτομο βρίσκεται στη ζωή

Ορισμός

Εποχή υπολογισμού καλείται η στιγμή που στεκόμαστε και ζητάμε και ζητάμε να βρούμε την αξία των όρων της ράντας.

Ορισμός

Εάν η αρχή της ράντας συμπίπτει με την εποχή υπολογισμού της ράντας, τότε η μεν ράντα καλείται **άμεση**, η δε αξία της **αρχική ή παρούσα αξία ράντας.**

Εάν η αρχή της ράντας είναι μεταγενέστερη από την εποχή υπολογισμού καλείται **μέλλουσα**, εάν δε προγενέστερη από την εποχή υπολογισμού καλείται **αρξάμενη**.

Συμβολισμοί

$A \rightarrow$ Παρούσα ή Αρχική Αξία

$S \rightarrow$ Μέλλουσα ή Τελική Αξία

$R \rightarrow$ Όρος ή Δόση

$n \rightarrow$ Έτος ή αριθμόςπεριόδων ράντας

$i \rightarrow$ Επιτόκιο

Εύρεση της Αρχικής Αξίας Σταθερής και Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$$A = R\frac{1-U^n}{i}$$

Εύρεση της Τελικής Αξίας Σταθερής και Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Παρατήρηση

Οι τύποι λύνονται και ως προς τις άλλες παραμέτρους ανάλογα με το τι μας δίνεται και με τι ζητείται

Εύρεση της Αρχικής Αξίας Σταθερής και Προκαταβλητέας Ράντας

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)$$

Εύρεση της Τελικής Αξίας Σταθερής και Προκαταβλητέας Ράντας

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

Ράντα, Σταθερή, Ακέραια, Πρόσκαιρη, Ληξιπρόθεσμη και Μέλλουσα

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{-r}$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ράντα, Σταθερή, Ακέραια, Πρόσκαιρη, Προκαταβλητέα και Μέλλουσα

$$A = R\frac{1-U^n}{i}(1+i)^{1-r}$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

Ράντα, Σταθερή, Ακέραια, Διηνεκής, Ληξιπρόθεσμη και Άμεση

$$A = \frac{R}{i}$$

$$S = \infty$$

Ράντα, Σταθερή, Ακέραια, Διηνεκής, Προκαταβλητέα και Άμεση

$$A = \frac{R}{i}(1+i)$$

$$S = \infty$$

Παρατήρηση

Ακέραια καλείται η ράντα όπου n ακέραιος, αν δεν είναι ακέραιος καλείται κλασματική

Κλασματικές Ράντες

Έστω i το επιτόκιο ανατοκισμού και έστω ότι έχουμε μια ράντα που χωράει λ φορές στην χρονική περίοδο του επιτοκίου i, τότε για την εύρεση της αρχικής και τελικής αξίας βρίσκουμε το ισοδύναμο επιτόκιο και στην συνέχεια εργαζόμαστε κατά τα γνωστά.

Δάνεια