ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΠΑΤΡΑΣ
Εργαστήριο Λήψης Αποφάσεων & Επιχειρησιακού Προγραμματισμού
Καθηγητής Ι. Μητρόπουλος

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 11

Εισαγωγή στον έλεγχο υποθέσεων

Στατιστική Συμπερασματολογία

Έλεγχος υποθέσεων είναι η δεύτερη μορφή της στατιστικής συμπερασματολογίας. Έχει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατότητα εφαρμογής.

Προκειμένου να κατανοηθούν οι έννοιες θα αρχίσουμε με ένα παράδειγμα μη στατιστικής δοκιμής μιας υπόθεσης.

Μη στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

Μια ποινική δίκη είναι ένα παράδειγμα ελέγχου υπόθεσης χωρίς την διάσταση της στατιστικής επιστήμης.

Σε μια δίκη μια επιτροπή ενόρκων πρέπει να αποφασίσουν ανάμεσα σε δύο υποθέσεις. Η μηδενική υπόθεση είναι:

H_0: Ο κατηγορούμενος είναι αθώος

Η εναλλακτική υπόθεση ή υπόθεση υπό έρευνα είναι:

H_1: Ο κατηγορούμενος είναι ένοχος

Η επιτροπή ενόρκων δεν ξέρει ποια υπόθεση είναι αλήθεια. Πρέπει να βγάλουν μια απόφαση με βάση τα στοιχεία που παρουσιάστηκαν.

Μη στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

Στη γλώσσα της στατιστικής η καταδίκη του κατηγορουμένου ισοδυναμεί με

απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης.

Δηλαδή, η επιτροπή ενόρκων λέει ότι υπάρχουν αρκετά (επαρκή) στοιχεία που οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο κατηγορούμενος είναι ένοχος (δηλαδή, υπάρχουν αρκετά στοιχεία που να υποστηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση).

Μη στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

Αν η επιτροπή ενόρκων δηλώσει ότι

δεν υπάρχουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία που να υποστηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση.

Παρατηρήσετε ότι η επιτροπή ενόρκων δεν λέει ότι ο εναγόμενος είναι αθώος, αλλά μόνο δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία που να στηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση. Γι ' αυτό και ποτέ δεν λέμε ότι δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση.

Μη στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

Υπάρχουν δύο τύποι πιθανών σφαλμάτων.

- Το σφάλμα τύπου I συμβαίνει όταν ***απορρίπτεται μια αληθινή μηδενική απόφαση***.

Συνεπώς στο παράδειγμα, σφάλμα τύπου I συμβαίνει όταν οι ένορκοι καταδικάζουν ένα αθώο άνθρωπο.

- Το σφάλμα τύπου II συμβαίνει όταν ***δεν απορρίπτεται μια ψευδής μηδενική απόφαση***.

Συνεπώς στο παράδειγμα, σφάλμα τύπου I συμβαίνει όταν ένας ένοχος κατηγορούμενος αθωώνεται.

Η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I συμβολίζεται με το Ελληνικό γράμμα ***α*** .

Η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II συμβολίζεται με το Ελληνικό γράμμα ***β***.

Οι δύο παραπάνω πιθανότητες ***α, β*** είναι αντιστρόφως ανάλογες. Μειώνοντας το ένα αυξάνει το άλλο.

Μη στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων

Οι κρίσιμες έννοιες :

1. Υπάρχουν δύο υποθέσεις, η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση.
2. Η διαδικασία αρχίζει με την παραδοχή ότι η μηδενική υπόθεση είναι αλήθεια.
3. Στόχος του ελέγχου υποθέσεων είναι να καθοριστεί αν υπάρχουν αρκετές αποδείξεις που να υποστηρίζουν το αληθές της εναλλακτικής υπόθεσης.
4. Οι δυνατές αποφάσεις είναι δύο:

   Στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν αρκετά στοιχεία που να στηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση δηλαδή μιλάμε για α***πόρριψη της μηδενικής υπόθεσης***.
   Στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία που να υποστηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση δηλαδή μιλάμε για ***μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης***.
5. Υπάρχουν δύο τύποι σφαλμάτων.

   Τύπος σφάλματος I: Απόρριψη αληθούς μηδενικής απόφασης

   Τύπος σφάλματος II : Μη απόρριψη ψευδούς μηδενικής απόφασης

   P(Τύπος σφάλματος I) = α

   P(Τύπος σφάλματος II) = β

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων(1)

Υπάρχουν **δύο** υποθέσεις. Η πρώτη ονομάζεται ***μηδενική υπόθεση*** και η δεύτερη ως ***εναλλακτική ή ερευνητική υπόθεση***. Η συνήθης σημειογραφία είναι:

H_0: — *η 'μηδενική' υπόθεση*

H_1: — *η 'εναλλακτική' or 'ερευνητική' υπόθεση*

Η μηδενική υπόθεση (H_0) δηλώνει πάντοτε ότι μια παράμετρος ισούται με την τιμή που καθορίζεται με την εναλλακτική υπόθεση (H_1)

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων

Σκεφτείτε το παράδειγμα 10.1 (μέση ζήτηση για υπολογιστές) ξανά. Αντί να εκτιμήσει τη μέση ζήτηση, ο διαχείρισης εργασιών θέλει να ξέρει αν η μέση τιμή ***είναι διαφορετική από 350 μονάδες***. Μπορεί να αναδιατυπώσει αυτό το αίτημα σε μια δοκιμή της υπόθεσης:

$$H_0: \mu = 350$$

Έτσι, η υπόθεση έρευνας (εναλλακτική υπόθεση) γίνεται :

$$H_1: \mu \neq 350$$

Αυτό είναι τι ενδιαφερόμαστε για τον καθορισμό...

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων(2)

Η διαδικασία ελέγχου ξεκινά με την ***παραδοχή ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής*** .

Έτσι, μέχρι να έχουμε περαιτέρω στατιστικές αποδείξεις, θα **υποθέσουμε ότι** :

H_0: $\mu = 350$ (υποθέτοντας ότι είναι TRUE)

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων(3)

Ο **στόχος** της διαδικασίας είναι να καθορίσει ***εάν υπάρχουν επαρκείς αποδείξεις*** να συμπεράνουμε ότι η εναλλακτική υπόθεση είναι αληθής.

Δηλαδή, υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις στατιστικών πληροφοριών για να προσδιοριστεί εάν αυτή η δήλωση είναι αληθινή;

$$H_1: \mu \neq 350$$

Αυτό είναι τι ενδιαφερόμαστε
για τον καθορισμό...

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων(4)

Υπάρχουν **δύο** πιθανές αποφάσεις που μπορούν να ληφθούν:

Να συμπεράνουμε **ότι υπάρχουν** **αρκετά στοιχεία** που να υποστηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση (αναφέρεται επίσης ως: ***απόρριψη*** της μηδενικής υπόθεσης υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης)

Να συμπεράνουμε **ότι δεν υπάρχουν** **αρκετά** που να υποστηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση (αναφέρεται επίσης ως: ***μη απόρριψη*** της μηδενικής υπόθεσης υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης)

Σημείωση: **δεν λέμε** ότι **δεχόμαστε** τη μηδενική υπόθεση…

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων

Μόλις η μηδενική και η εναλλακτική υπόθεση προσδιοριστούν, το επόμενο βήμα είναι μια τυχαία δειγματοληψία στον πληθυσμό και υπολογισμός ενός δείκτη που ονομάζεται ***στατιστικός έλεγχος*** (***test statistic)*** και είναι ο καλύτερος εκτιμητής της παραμέτρου που ελέγχεται (για το παράδειγμά μας ο αριθμητικός μέσος δείγματος).

Εάν η τιμή του στατιστικού ελέγχου είναι ασυμβίβαστη με την μηδενική υπόθεση τότε ***θα απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση*** και ***συμπεράνουμε ότι η εναλλακτική υπόθεση είναι αληθής***.

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων

Για παράδειγμα, εάν προσπαθούμε να αποφασίσουμε αν η μέση τιμή δεν είναι ίση με 350, μια μεγάλη τιμή του $\overline{x}$ (ας πούμε, 600) θα παρέχει επαρκή αποδεικτικά στοιχεία.

Εάν το $\overline{x}$ είναι κοντά στο 350 (ας πούμε, 355) δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό παρέχει μια μεγάλη απόδειξη να συμπεράνουμε ότι ο μέσος αριθμητικός του πληθυσμού (παράμετρος) είναι διαφορετικός από 350.

Έννοιες Ελέγχου Υποθέσεων(5)

Δύο πιθανά λάθη που μπορεί να γίνουν σε οποιαδήποτε στατιστικό έλεγχο:

Τύπος σφάλματος I: Απόρριψη αληθούς μηδενικής απόφασης

Τύπος σφάλματος II: Μη απόρριψη ψευδούς μηδενικής απόφασης

P(Τύπος σφάλματος I) = α

P(Τύπος σφάλματος II) = β

Το ***α*** ονομάζεται ***επίπεδο εμπιστοσύνης***.

Τύπος σφάλματος I & II

Τύπος σφάλματος I συμβαίνει όταν ***απορρίπτουμε μια αληθή*** μηδενική υπόθεση(δηλ., απορρίπτουμε H_0 όταν είναι TRUE)

H_0	T	F
Reject	I	
~~Reject~~		II

Τύπος σφάλματος II συμβαίνει όταν ***δεν απορρίπτουμε μια ψευδή*** a ***false*** μηδενική υπόθεση(δηλ, δεν απορρίπτουμε H_0 όταν είναι FALSE)

Παράδειγμα 11.1

Ο διαχειριστής ενός πολυκαταστήματος σκέφτεται για τη θέσπιση ενός νέου συστήματος χρέωσης για τους πελάτες του καταστήματος.

Το νέο σύστημα θα είναι αποδοτικό, μόνο αν ο μέσος μηνιαίος λογαριασμός είναι περισσότερο από $170. Ένα τυχαίο δείγμα των 400 μηνιαίων λογαριασμών επιλέγεται, από το οποίο προκύπτει ότι ο αριθμητικός μέσος δείγματος είναι $178.

Ο διαχειριστής γνωρίζει ότι οι λογαριασμοί περίπου ακολουθούν την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση των $65. Ο διαχειριστής μπορεί να συμπεράνει από αυτό ότι το νέο σύστημα θα είναι αποδοτικό;

Παράδειγμα 11.1

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ

Το σύστημα θα είναι οικονομικά αποδοτικό εάν ο μέσος λογαριασμός για όλους τους πελάτες είναι μεγαλύτερος από 170 δολάρια.

Εκφράζουμε αυτήν την πεποίθηση υπόθεση έρευνας, δηλαδή:

H_1: $\mu > 170$ (Αυτό είναι αυτό που θέλουμε να καθοριστεί)

Κατά συνέπεια, η μηδενική υπόθεση γίνεται:

H_0: $\mu = 170$ (αυτό καθορίζει μία τιμή για την παράμετρο ενδιαφέροντος)

Παράδειγμα 11.1

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ

Τι θέλουμε να δείξουμε:

H_0: $\mu = 170$ (θα *υποθέσουμε* ότι αυτό είναι αλήθεια)

H_1: $\mu > 170$

Γνωρίζουμε ότι:

$n = 400$,

$\bar{x} = 178$, και

$\sigma = 65$

Τι να κάνω τώρα?!

Παράδειγμα 11.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Για να ελέγξουμε τις υποθέσεις μας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις:

Η προσέγγιση της ***περιοχής απόρριψης*** (συνήθως χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό στατιστικών με μη αυτόματο τρόπο),

Η προσέγγιση της ***τιμής p*** (***p-value)*** (που γενικά χρησιμοποιείται από υπολογιστή και το στατιστικό λογισμικό).

Θα εξερευνήσουμε και τις δύο με τη σειρά…

COMPUTE

Παράδειγμα 11.1 Περιοχή απόρριψης

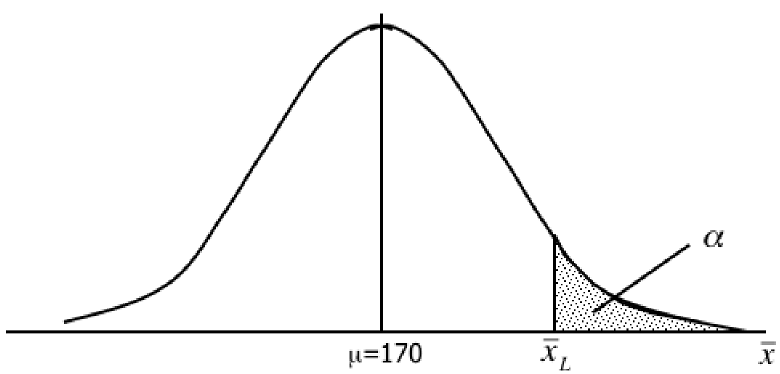
Φαίνεται λογικό κανείς να απορρίψει την μηδενική υπόθεση υπέρ της εναλλακτικής εάν η τιμή του μέσου αριθμητικού του δείγματος είναι αρκούντως μεγαλύτερη από 170, δηλ.

$$\bar{x} > \bar{x}_L$$

$\alpha = P(\text{Τύπος σφάλματος I})$

$= P(\text{ απόρριψη } H_0 \text{ , δεδομένου ότι } H_0 \text{ αληθής})$

$\alpha = P(\bar{x} > \bar{x}_L)$



Περιοχή απόρριψης ονομάζεται το διάστημα τιμών για το οποίο θεωρούμε ότι, αν ο στατιστικός δείκτης του δείγματος βρεθεί εκεί, ***τότε η μηδενική υπόθεση πρέπει να απορριφθεί.***

Παράδειγμα 11.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Αυτό που πρέπει είναι να υπολογίσετε $\bar{x}_L$ και να το συγκρίνετε με το 170.

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

$$\therefore \frac{\bar{x}_L-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

Μπορεί να υπολογιστεί βάση οποιουδήποτε επιπέδου σημαντικότητας (α) επιθυμούμε …

Παράδειγμα 11.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

5% επίπεδο σημαντικότητας δηλ. α =0,05

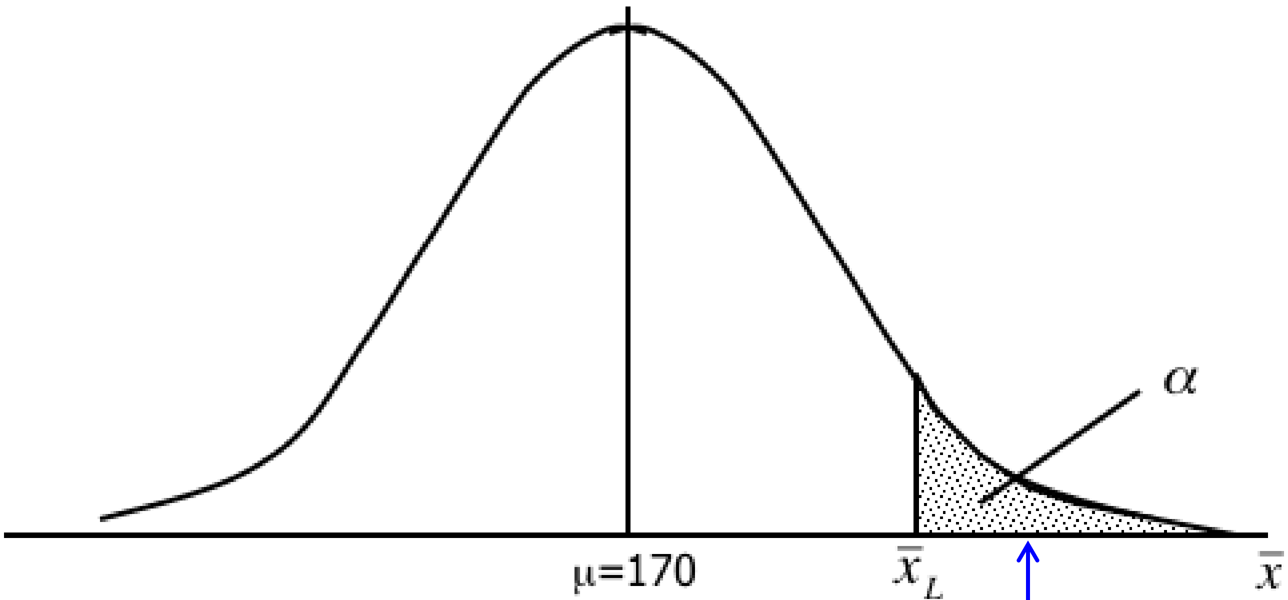
$$\frac{\bar{x}_L - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\alpha \quad \& \quad z_\alpha = z_{.05} = 1.645$$

$$gives: \ \frac{\bar{x}_L - 170}{65/\sqrt{400}} = 1.645$$

Υπολογίζεται $\bar{x}_L = 175.34$

Αφού ο μέσος αριθμητικός του δείγματος (που είναι 178) είναι ***μεγαλύτερος από*** την κρίσιμη τιμή που υπολογίσαμε (175.34), απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση H_0 υπέρ της H_1, δηλ. το: $\mu > 170$ συνεπώς είναι οικονομικά αποδοτικά η εισαγωγή νέου συστήματος τιμολόγησης

Παράδειγμα 11.1 Συνολική εικόνα



$\cancel{H_0: \mu = 170}$

$H_1: \mu > 170$

$\bar{x}_L = 175.34$

$\bar{x} = 178$

Απόρριψη H_0 υπέρ της H_1

Τυποποιημένος στατιστικός έλεγχος

Μια ευκολότερη μέθοδος είναι να χρησιμοποιήσετε τον ***τυποποιημένο στατιστικό έλεγχο***:

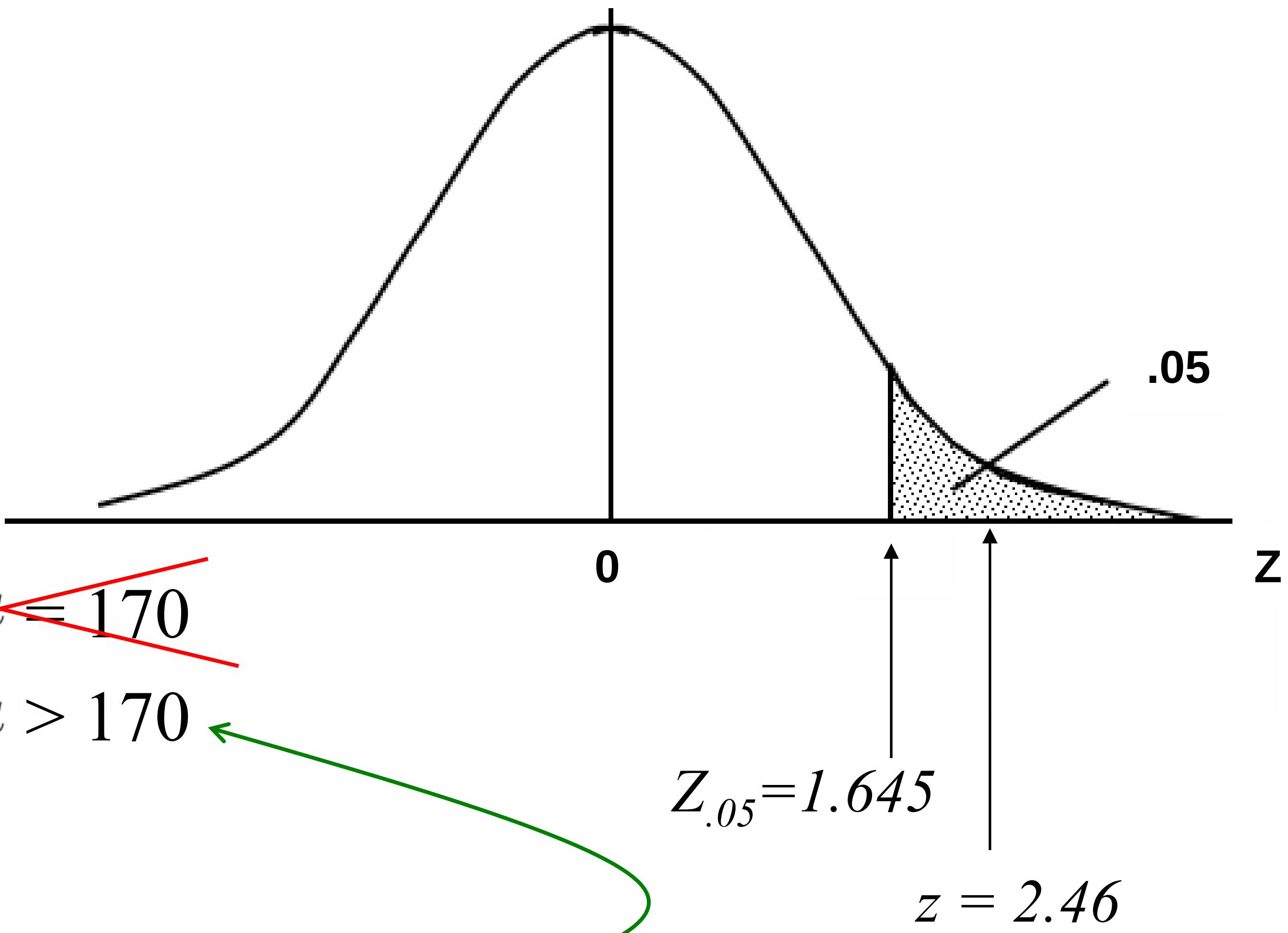
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

συγκρίνεται τα αποτελέσματα: z_α (περιοχή απόρριψης: $z > z_\alpha$)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{178 - 170}{65 / \sqrt{400}} = 2.46$$

Αφού z = 2.46 > 1.645 ($z_{.05}$), απορρίπτουμε H_0 υπέρ της H_1…

Παράδειγμα 11.1… Συνολική εικόνα (Again)



~~$H_0: \mu = 170$~~

$H_1: \mu > 170$

Απόρριψη H_0 υπέρ της

p-τιμή ελέγχου

Η ***τιμή p (p-value)*** είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να πάρει ο έλεγχος μια τιμή σαν αυτή που έχει υπολογιστεί από το δείγμα, με δεδομένη την αλήθεια της μηδενικής υπόθεσης.

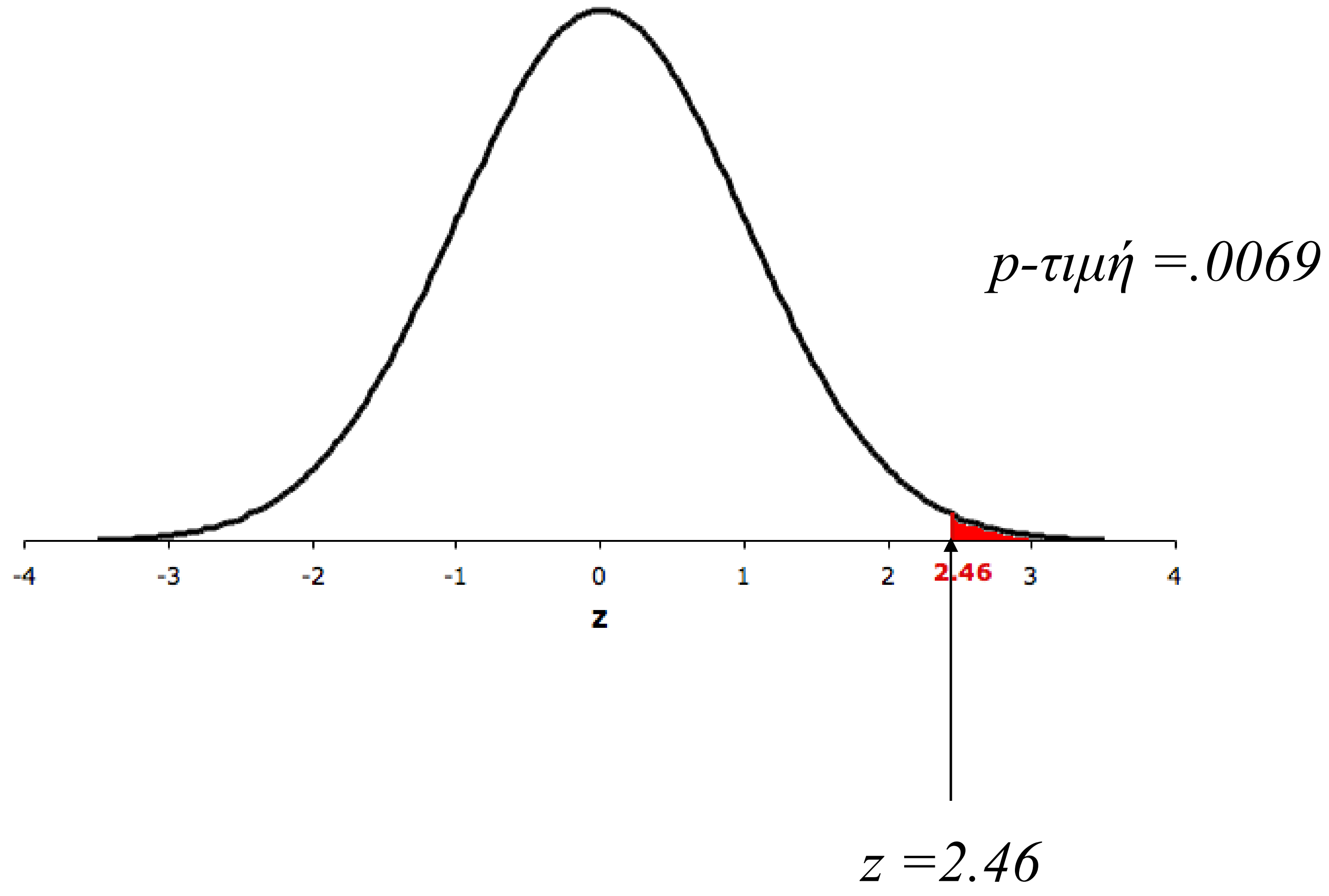
Στην περίπτωση μας το παράδειγμα πολυκατάστημα, ποια η ***πιθανότητα*** να παρατηρηθεί μέσος αριθμητικός δείγματος ***τουλάχιστον τόσο ακραίος όσο αυτός*** που έχει ήδη παρατηρηθεί (δηλ. $\bar{x}$= 178),

δεδόμενου ότι η μηδενική υπόθεση είναι (H_0: μ = 170) αληθής?

$$P(\bar{x} > 178) = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{178-170}{65/\sqrt{400}}\right) = P(Z > 2.46) \boxed{= .0069 \quad \text{p-value}}$$

p-τιμή ελέγχου

$p\text{-τιμή} = P(Z > 2.46)$



Ερμηνεύοντας την p-τιμή

Όσο μικρότερη είναι η p-τιμή, τόσο περισσότερα αποδεικτικά στατιστικά στοιχεία υπάρχουν που στηρίζουν την εναλλακτική υπόθεση.

Εάν η p-τιμή είναι μικρότερη του 1%, τότε υπάρχει ***συντριπτική απόδειξη (overwhelming evidence)*** που υποστηρίζει την εναλλακτική υπόθεση

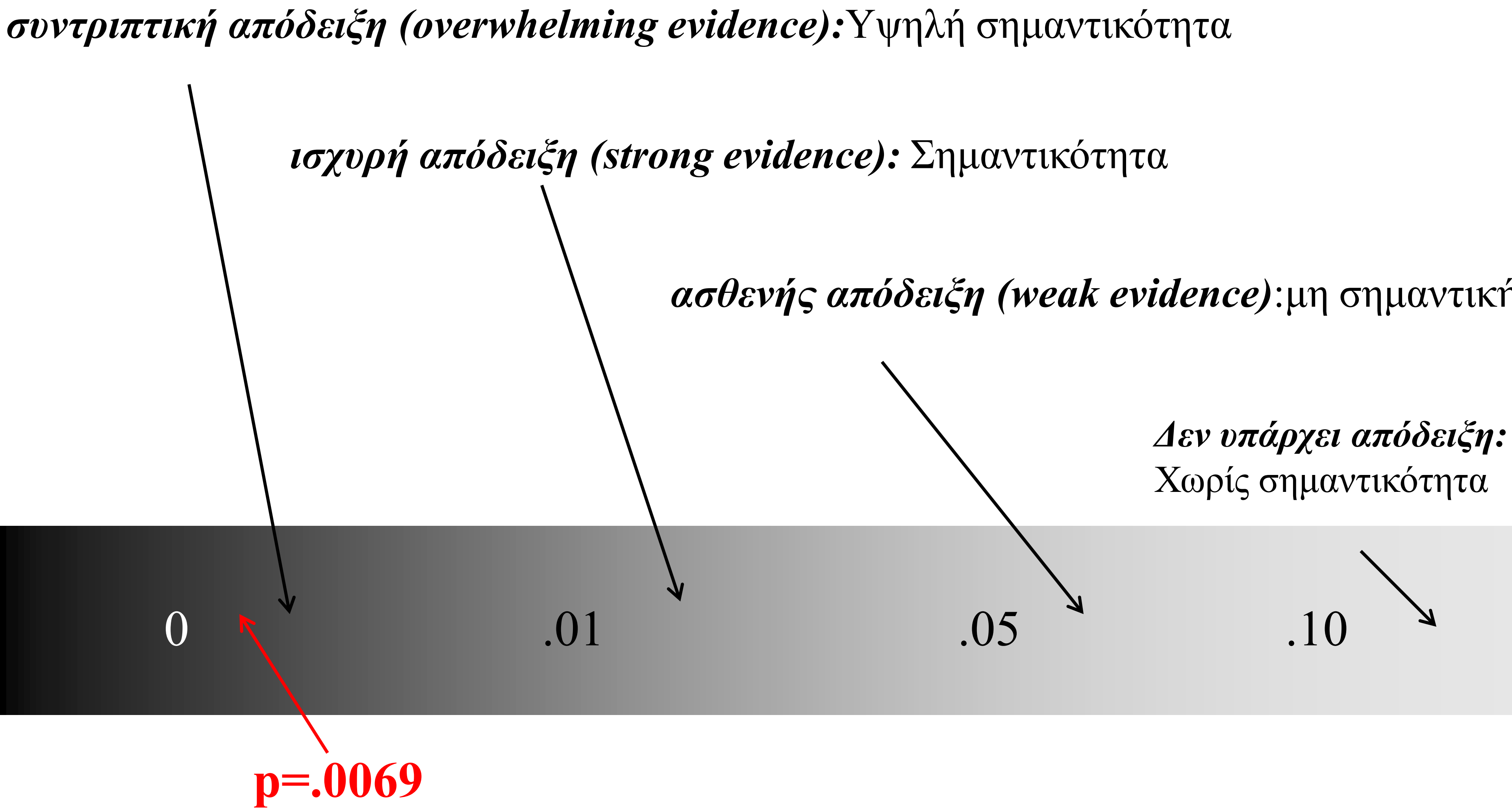
Εάν η p-τιμή είναι μεταξύ1% και 5%, τότε υπάρχει ***ισχυρή απόδειξη (strong evidence)*** που υποστηρίζει την εναλλακτική υπόθεση.

Εάν η p-τιμή είναι μεταξύ 5% και 10% τότε υπάρχει ***ασθενής απόδειξη (weak evidence)*** που υποστηρίζει την εναλλακτική υπόθεση.

Εάν η p-τιμή ξεπερνά το 10%, τότε δεν υπάρχει απόδειξη (***evidence)*** που υποστηρίζει την εναλλακτική υπόθεση.

Για το παράδειγμα παρατηρούμε μια p-τιμή 0,0069, συνεπώς υπάρχει συντριπτική απόδειξη που υποστηρίζει H_1: $\mu > 170$.

Ερμηνεύοντας την p-τιμή



Ερμηνεύοντας την p-τιμή

Συγκρίνετε την p-τιμή με την επιλεγμένη τιμή του επίπεδου σημαντικότητας:

Εάν η p-τιμή είναι μικρότερη του α , κρίνουμε ότι η p-τιμή είναι αρκετά μικρή και απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

Εάν η p-τιμή είναι μεγαλύτερη του α, δεν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση.

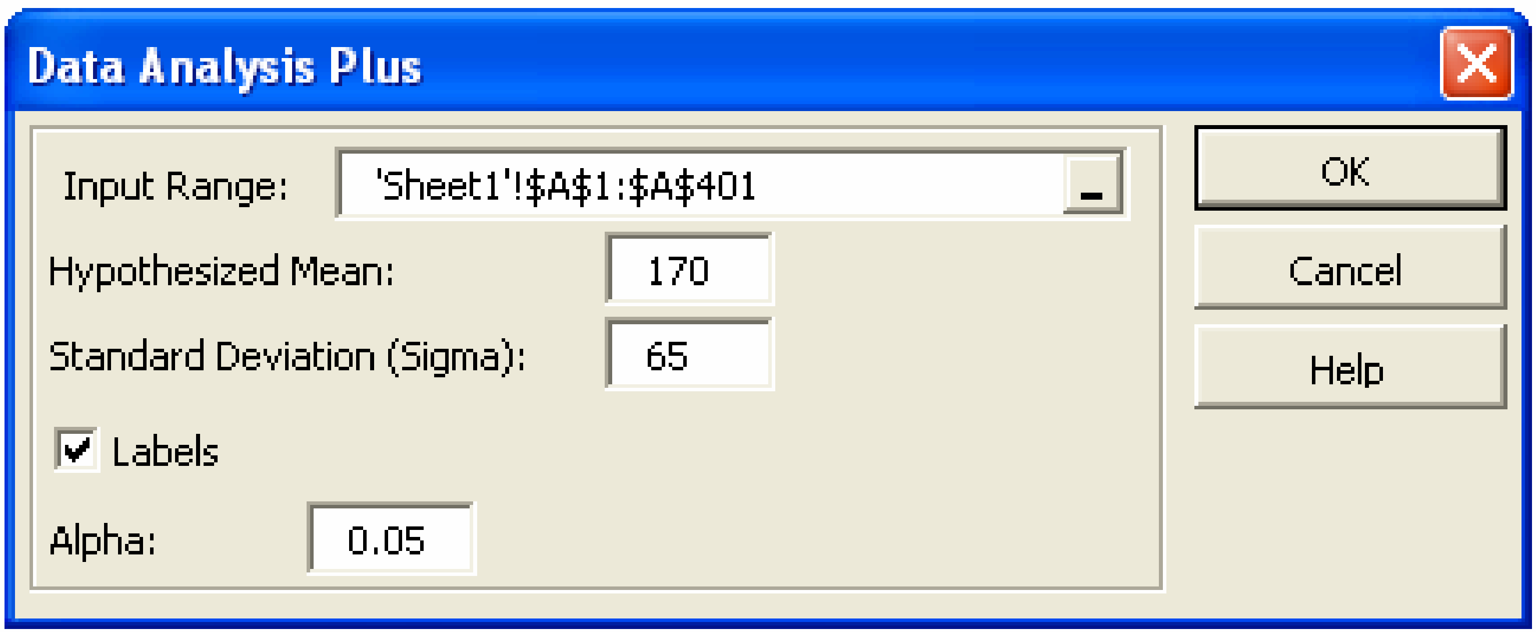
Για το παράδειγμά μας αφού η p-τιμή = .0069 < α = .05, απορρίπτουμε H_0 υπέρ της H_1

Παράδειγμα 11.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Consider the data set for Xm11-01.

Click: Add-Ins > Data Analysis Plus > Z-Test: Mean



Παράδειγμα 11.1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

	A	B	C	D
1	**Z-Test: Mean**			
2				
3				*Accounts*
4	Mean			178.00
5	Standard Deviation			68.37
6	Observations			400
7	Hypothesized Mean			170
8	SIGMA			65
9	z Stat			2.46
10	P(Z<=z) one-tail			0.0069
11	z Critical one-tail			1.6449
12	P(Z<=z) two-tail			0.0138
13	z Critical two-tail			1.96

Συμπεράσματα του ελέγχου υπόθεσης

Αν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν αρκετά στοιχεία (αποδείξεις) για να συμπεράνουμε ότι η εναλλακτική υπόθεση είναι αλήθεια.

Αν δεν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία (αποδείξεις) να συμπεράνουμε ότι η εναλλακτική υπόθεση είναι αλήθεια.

Θυμηθείτε: Η εναλλακτική υπόθεση είναι το πιο σημαντική. Αντιπροσωπεύει τι ερευνούμε.

Παράδειγμα Κεφαλαίου SSA σχέδιο φάκελου

Federal Express (FedEx) στέλνει ταχυδρομικά τα τιμολόγια στους πελάτες που ζητούν την πληρωμή εντός 30 ημερών.

Κατά το πώς συμβαίνει έως τώρα οι πελάτες αναμένεται αφού παραλάβουν τα τιμολόγια να χρησιμοποιούσουν δικούς τους φακέλους προκειμένου να αποστείλουν τις πληρωμές τους μέσω ταχυδρομείου.

Σήμερα ο μέσος όρος και τυπική απόκλιση του ποσού του χρόνου που απαιτείται για να πληρώσει ο πελάτης τους λογαριασμούς είναι 24 ημέρες και 6 ημέρες, αντίστοιχα.

Ο οικονομικός διευθυντής πιστεύει ότι συμπεριλαμβάνοντας στο φάκελο αποστολής των τιμολογίων ένα έτοιμο φάκελο με έτοιμη διεύθυνση αποστολής και πληρωμένα τέλη θα μειώσει το χρόνο ανταπόκρισης των πελατών

Παράδειγμα Κεφαλαίου SSA σχέδιο φάκελου

Ο οικονομικός διευθυντής πιστεύει πως μια βελτιωμένη ταμειακή ροή από μια 2 ημερών μείωση στην περίοδο αποπληρωμής είναι ικανή να αποκαταστήσει το επιπλέον κόστος του φακέλου και προπληρωμένων τελών.

Οποιαδήποτε περαιτέρω μείωση της περιόδου πληρωμών θα παρήγαγε κέρδος.

Για να ελέγξει την πεποίθησή αυτή τυχαία επιλέγει 220 τους πελάτες, και συμπεριλαμβάνει ένα σφραγισμένο φάκελο με προπληρωμένα τέλη στην αποστολή του φακέλου με τα τιμολόγιά τους.

Ο αριθμός των ημερών μέχρι την ανταπόκριση των πελατών καταγράφηκε. Μπορεί ο οικονομικός διευθυντής να συμπεράνει ότι το σχέδιό του ήταν επικερδές;

SSA σχέδιο φάκελου

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ

Ο στόχος της μελέτης είναι να καταλήξει σε συμπέρασμα σχετικά με την περίοδο μέσης πληρωμής. Κατά συνέπεια, η παράμετρος που πρέπει να ελεγχτεί είναι ο πληθυσμιακός μέσος.

Θέλουμε να μάθουμε αν υπάρχουν αρκετά αποδεικτικά στατιστικά στοιχεία αποδεικνύουν ότι ο πληθυσμιακός μέσος είναι μικρότερος από 22 ημέρες.

Συνεπώς η εναλλακτική υπόθεση είναι:

$$H_1: \mu < 22$$

Η μηδενική υπόθεση είναι:

$$H_0: \mu = 22$$

SSA σχέδιο φάκελου

IDENTIFY

Ο έλεγχος που θα χρησιμοποιηθεί είναι:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Επιθυμούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση υπέρ της εναλλακτικής μόνο όταν ο μέσος αριθμητικός του δείγματος και επομένως η τιμή του στατιστικού ελέγχου είναι αρκετά μικρά, δηλαδή βρίσκεται στο αριστερό άκρο της καμπύλης (κατανομή δειγματοληψίας). Έτσι η περιοχή απόρριψης θα βρίσκεται στο αριστερό άκρο της καμπύλης/

Ορίζουμε ως επίπεδο σημαντικότητας το 10%.

SSA σχέδιο φάκελου

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Περιοχή απόρριψης: $z < -z_{\alpha} = -z_{.10} = -1.28$

Από τα στοιχεία Xm11-00 υπολογίζουμε

και

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{220} = \frac{4{,}759}{220} = 21.63$$

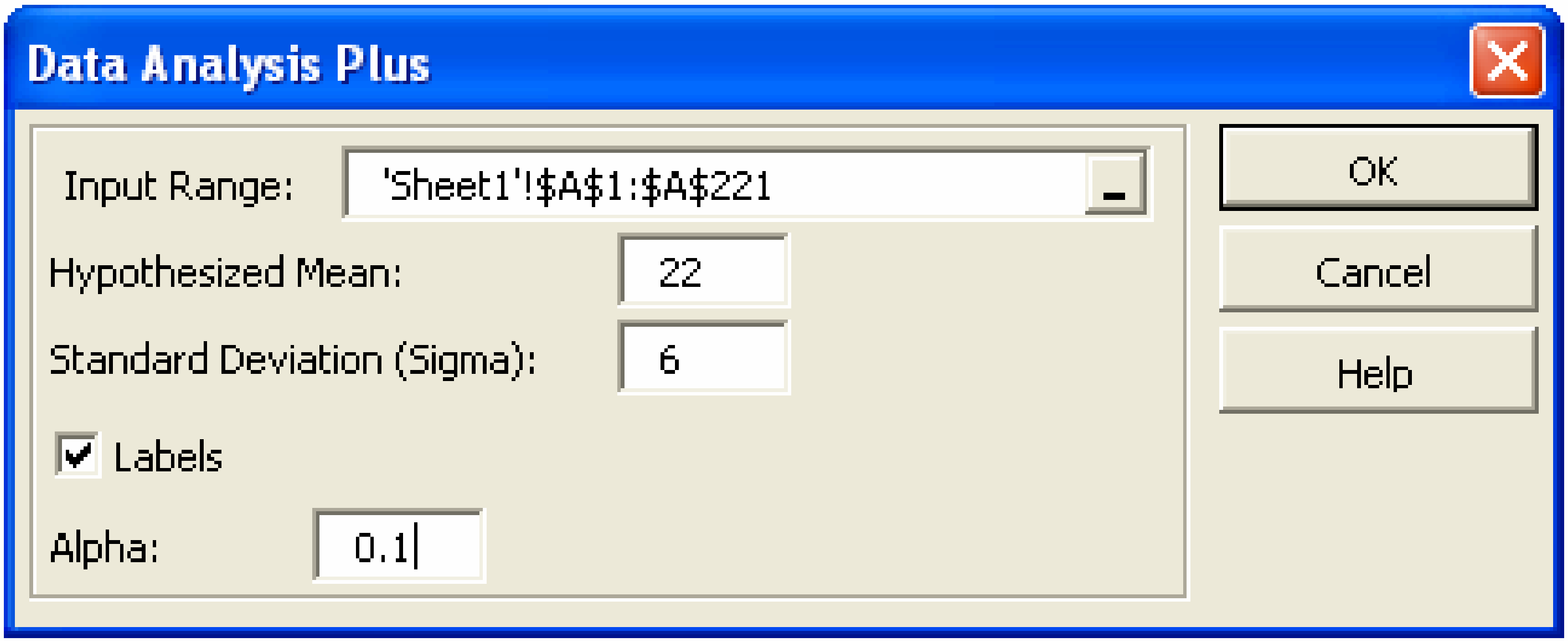
$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{21.63 - 22}{6 / \sqrt{220}} = -.91$$

p-τιμή = P(Z < -.91) = .5 - .3186 = .1814

SSA σχέδιο φάκελου

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Click Add-Ins, Data Analysis Plus, Z-Estimate: Mean



SSA σχέδιο φάκελου

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

	A	B	C	D
1	**Z-Test: Mean**			
2				
3				*Payment*
4	Mean			21.63
5	Standard Deviation			5.84
6	Observations			220
7	Hypothesized Mean			22
8	SIGMA			6
9	z Stat			-0.91
10	P(Z<=z) one-tail			0.1814
11	z Critical one-tail			1.2816
12	P(Z<=z) two-tail			0.3628
13	z Critical two-tail			1.6449

SSA σχέδιο φάκελου

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

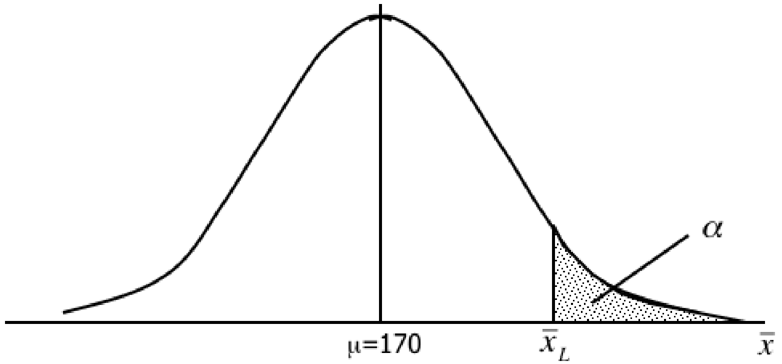
Και η τιμή του ελέγχου -0,91 (εκτός περιοχής απόρριψης) και η p-τιμή .1814 είναι δύο αποτελέσματα που δεν μας επιτρέπουν να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να συμπεράνουμε ότι η μέση τιμή είναι λιγότερο από 22.

Συνεπώς δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για να συμπεράνουμε ότι το σχέδιο θα είναι κερδοφόρα.

Μια– και Δυο–Ουρών Έλεγχος (Δίπλευρος έλεγχος)

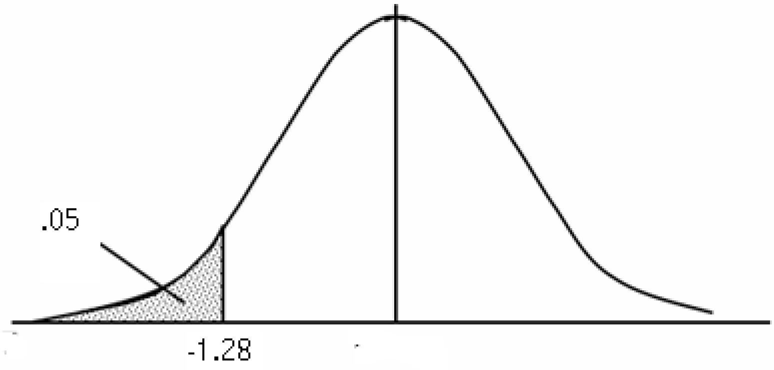
Το παράδειγμα με το πολυκατάστημα (Παράδειγμα11.1) ήταν ένας μονόπλευρος έλεγχος (***one tail test)***, διότι η περιοχή απόρριψης εντοπίζεται μόνο στην μια ουρά ή πλευρά της δειγματοληπτικής κατανομής :



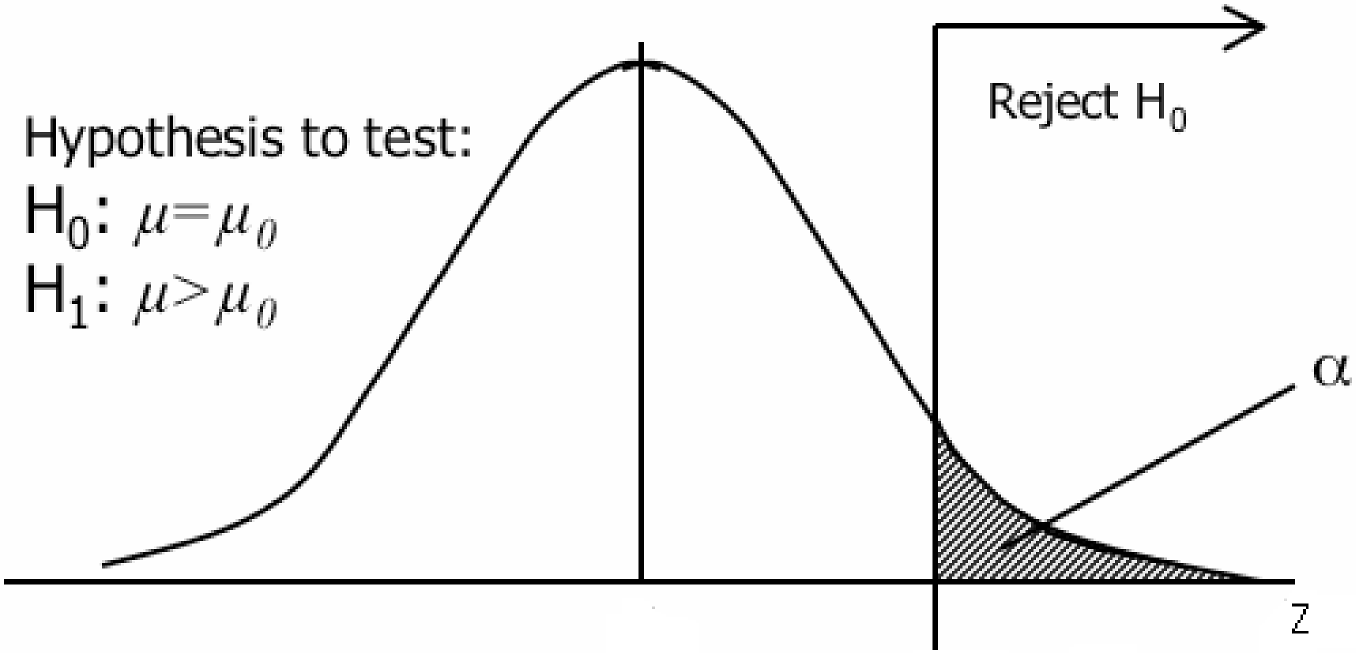
Πιο σωστά, αυτό ήταν ένα παράδειγμα ενός ελέγχου ***δεξιάς ουράς***.

Μια– και Δυο–Ουρών Έλεγχος (Δίπλευρος έλεγχος)

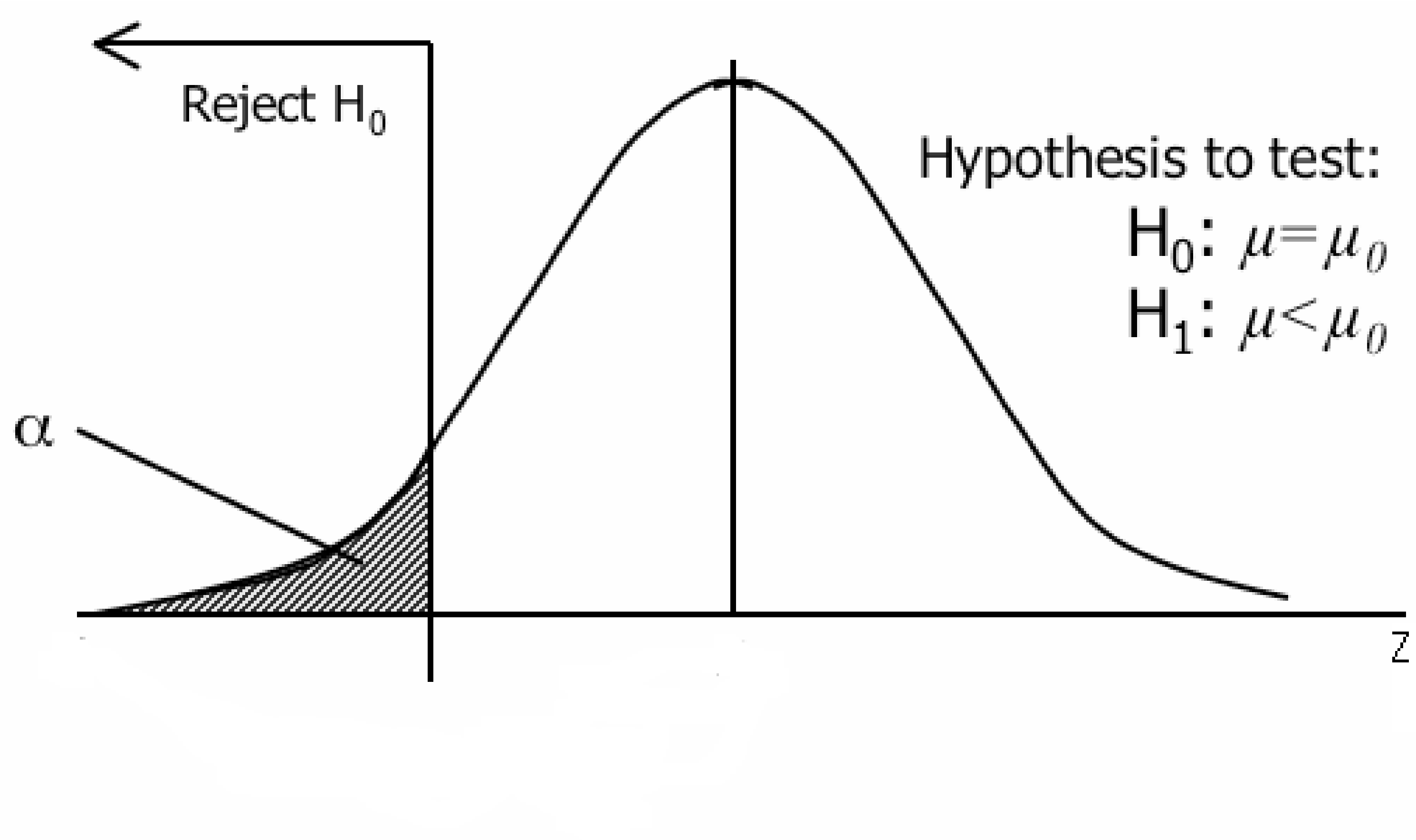
Το παράδειγμα SSA είναι έλεγχος ***αριστερής*** ουράς διότι η περιοχή απόρριψης στην ***αριστερή*** ουρά της δειγματοληπτικής κατανομής.



Δεξιάς-Ουράς Έλεγχος

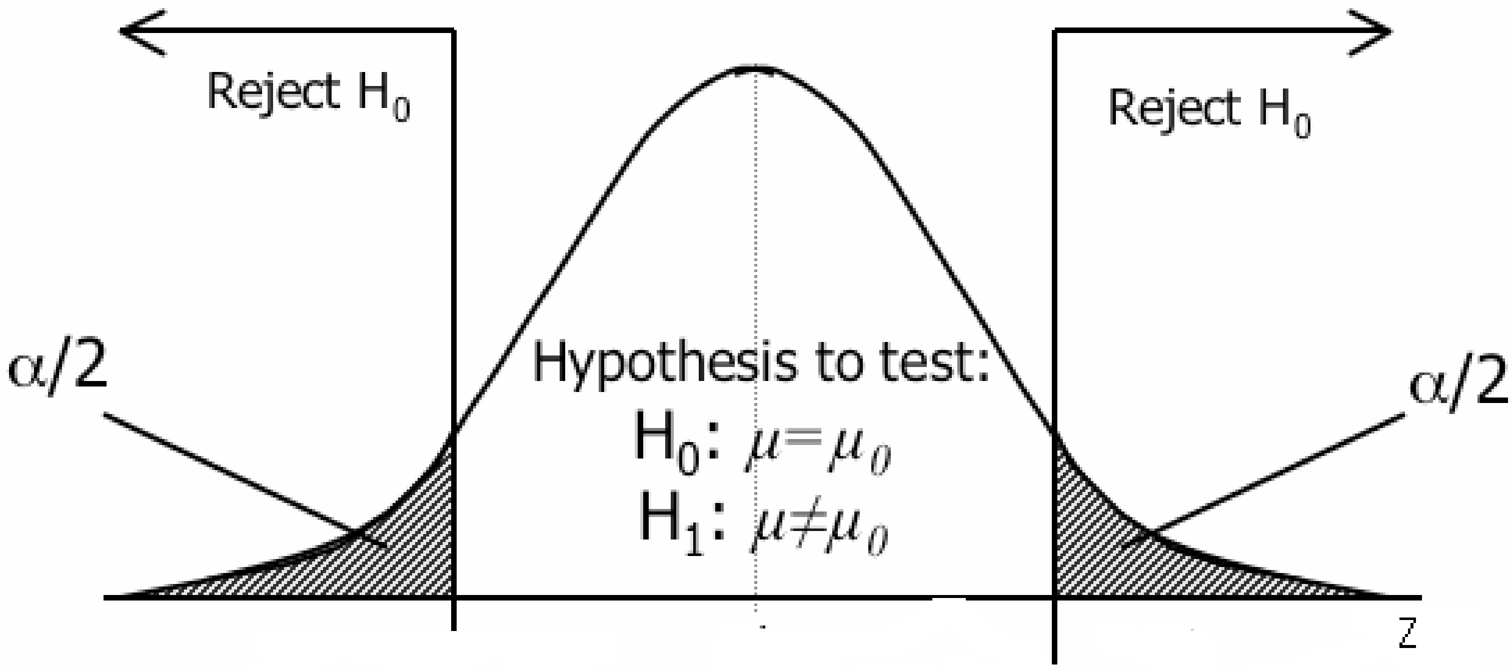


Αριστερής-Ουράς Έλεγχος



Δίπλευρος Έλεγχος

Ο δίπλευρος έλεγχος χρησιμοποιείται όταν η υπό έρευνα υπόθεση είναι ότι η παράμετρος δεν είναι ίση (≠) με κάποια συγκεκριμένη τιμή



Example 11.2

In recent years, a number of companies have been formed that offer competition to AT&T in long-distance calls.

All advertise that their rates are lower than AT&T's, and as a result their bills will be lower.

AT&T has responded by arguing that for the average consumer there will be no difference in billing.

Suppose that a statistics practitioner working for AT&T determines that the mean and standard deviation of monthly long-distance bills for all its residential customers are $17.09 and $3.87, respectively.

Example 11.2

He then takes a random sample of 100 customers and recalculates their last month's bill using the rates quoted by a leading competitor.

Assuming that the standard deviation of this population is the same as for AT&T, can we conclude at the 5% significance level that there is a difference between AT&T's bills and those of the leading competitor?

Example 11.2

IDENTIFY

The parameter to be tested is the mean of the population of AT&T's customers' bills based on competitor's rates.

What we want to determine whether this mean differs from \$17.09. Thus, the alternative hypothesis is

$$H_1: \mu \neq 17.09$$

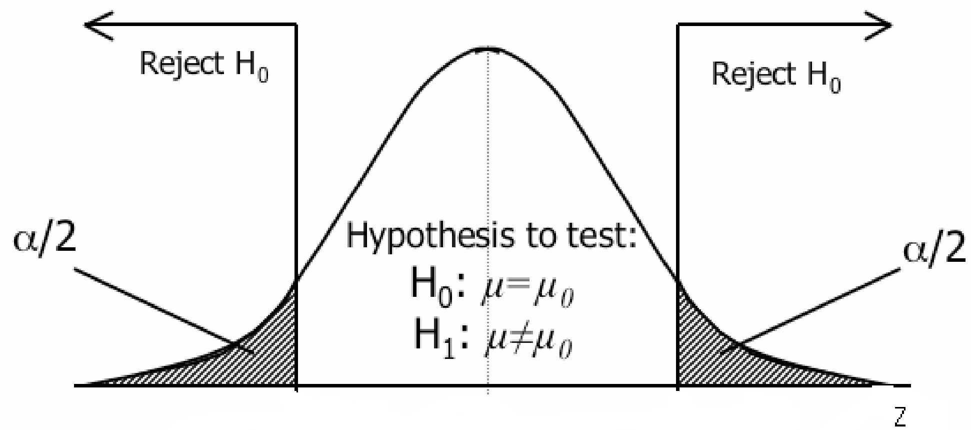
The null hypothesis automatically follows.

$$H_0: \mu = 17.09$$

Example 11.2

IDENTIFY

The rejection region is set up so we can reject the null hypothesis when the test statistic is large ***or*** when it is small.



stat is "small"

stat is "large"

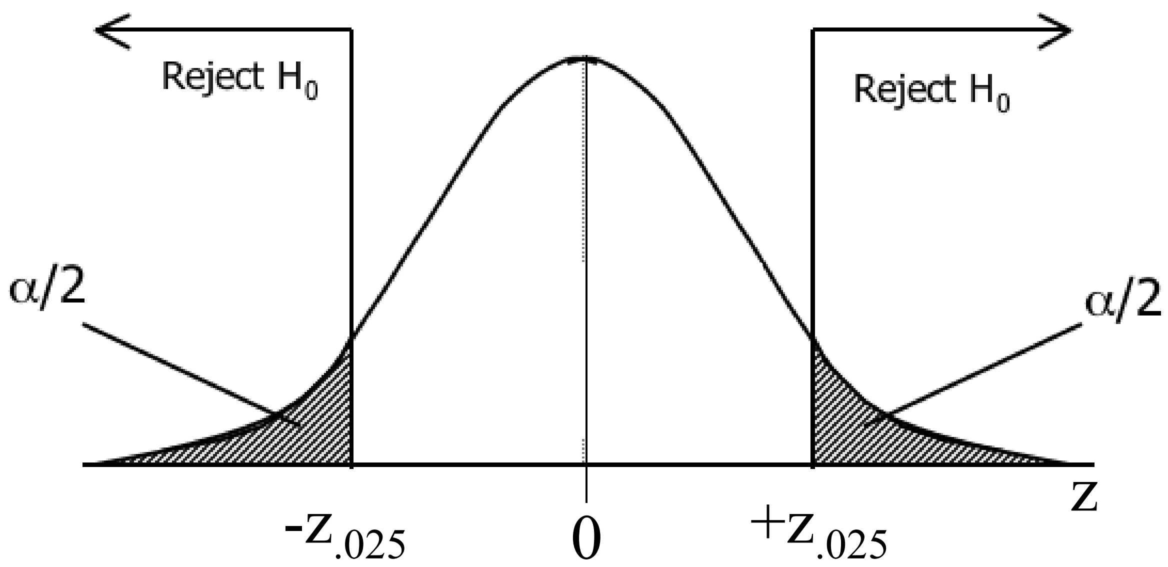
That is, we set up a two-tail rejection region. The total area in the rejection region must sum to α, so we divide this probability by 2.

Example 11.2

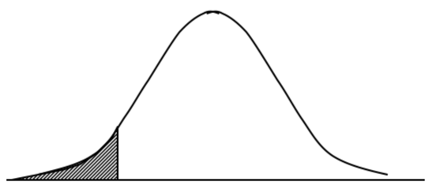
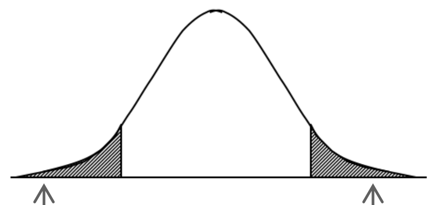
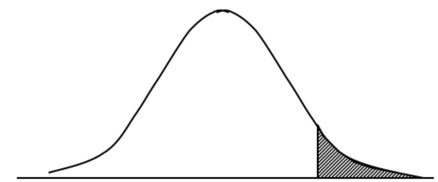
IDENTIFY

At a 5% significance level (i.e. $\alpha = .05$), we have $\alpha/2 = .025$. Thus, $z_{.025} = 1.96$ and our rejection region is:

$z < -1.96$ **-or-** $z > 1.96$



Σύνοψη Μονόπλευρου και Δίπλευρου Ελέγχου…

Μονόπλευρος (αριστερού άκρου)	Δίπλευρος	Μονόπλευρος (δεξιού άκρου)
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
		
Επίπεδο σημαντικότητας α 0,01 0,05 0,10	Επίπεδο σημαντικότητας α 0,01 0,05 0,10	Επίπεδο σημαντικότητας α 0,01 0,05 0,10
Κριτικές τιμές Z -2,33 -1,645 -1,28	Κριτικές τιμές Z 2,58 1,96 1,645 -2,58 -1,96 -1,645	Κριτικές τιμές Z 2,33 1,645 1,28

Example 11.2

COMPUTE

From the data (Xm11-02), we calculate $\bar{x} = 17.55$

Using our standardized test statistic: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

We find that: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{17.55 - 17.09}{3.87 / \sqrt{100}} = 1.19$

Since z = 1.19 is not greater than 1.96, nor less than –1.96 we cannot reject the null hypothesis in favor of H_1. That is ***"there is insufficient evidence to infer that there is a difference between the bills of AT&T and the competitor."***

Two-Tail Test p-value

COMPUTE

In general, the p-value in a two-tail test is determined by

$$\text{p-value} = 2P(Z > |z|)$$

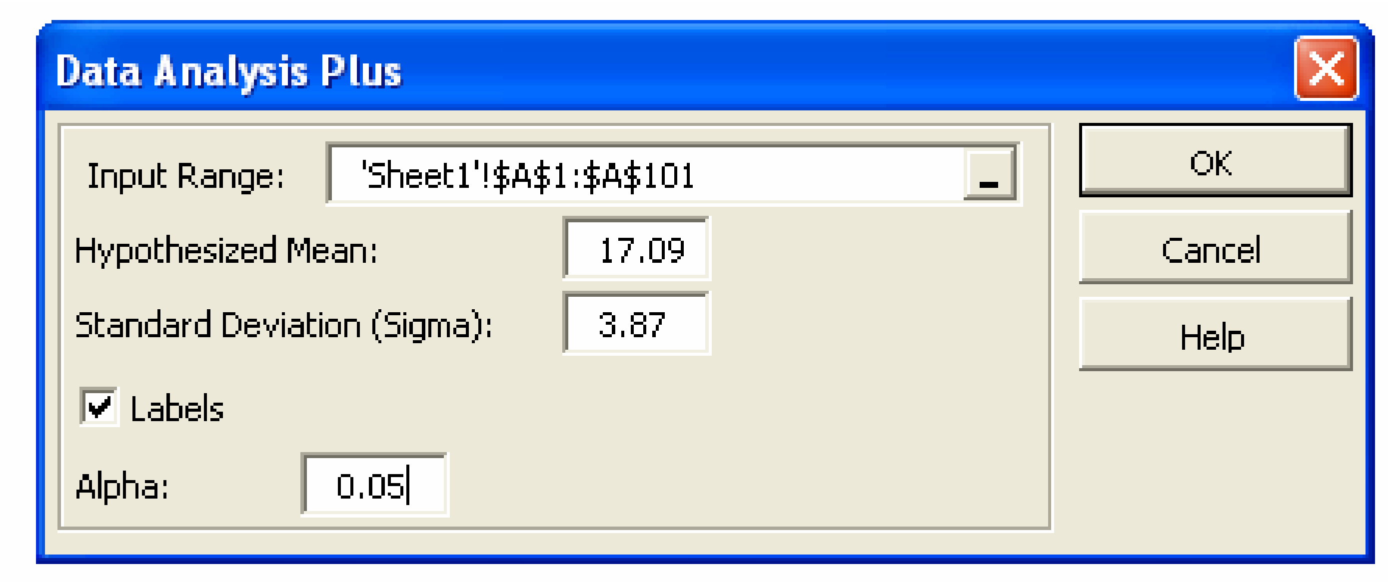
where z is the actual value of the test statistic and |z| is its absolute value.

For Example 11.2 we find

$$\begin{aligned}\text{p-value} &= 2P(Z > 1.19) \\ &= 2(.1170) \\ &= .2340\end{aligned}$$

Example 11.2

COMPUTE



Example 11.2

COMPUTE

	A	B	C	D
1	**Z-Test: Mean**			
2				
3				*Bills*
4	Mean			17.55
5	Standard Deviation			3.94
6	Observations			100
7	Hypothesized Mean			17.09
8	SIGMA			3.87
9	z Stat			1.19
10	P(Z<=z) one-tail			0.1173
11	z Critical one-tail			1.6449
12	P(Z<=z) two-tail			0.2346
13	z Critical two-tail			1.96

Ανάπτυξη την κατανόηση των στατιστικών εννοιών

1. Όπως και ο εκτιμητής διαστήματος εμπιστοσύνης, ο έλεγχος υποθέσεων βασίζεται στην κατανομή δειγματοληψίας ενός στατιστικού δείκτη του δείγματος και το αποτέλεσμα του ελέγχου υπόθεσης είναι μια έκφραση πιθανοτήτων για τον στατιστικό δείκτη του δείγματος.

2. Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμιακός μέσος έχει την τιμή που καθορίζεται από την μηδενική υπόθεση.

3. Όταν υπολογίζουμε τον στατιστικό έλεγχο τότε προσδιορίζουμε πόσο πιθανό είναι να παρατηρήσουμε αυτή την μεγάλη (μικρή) τιμή με δεδομένο ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής.

4. Εάν η πιθανότητα είναι μικρή τότε συμπεράνουμε ότι η μηδενική υπόθεση είναι αστήρικτη και την απορρίπτουμε.

Ανάπτυξη την κατανόηση των στατιστικών εννοιών

Όταν υπολογίζεται η τιμή ενός στατιστικού ελέγχου

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

μετράται επίσης η διαφορά ανάμεσα στον μέσο του δείγματος και τον (υποθετικό) μέσο του πληθυσμού με μονάδα μέτρησης το τυπικό σφάλμα $\sigma / \sqrt{n}$.

Στο παράδειγμα 11.2 βρήκαμε τιμή στατιστικού ελέγχου z = 1.19 δηλαδή ο μέσος του δείγματος βρίσκεται 1,19 τυπικά σφάλματα μακριά από τον μέσο του πληθυσμού. Στο πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής βλέπουμε ότι μια τέτοια απόσταση δεν είναι απίθανη, άρα δεν μπορούμε να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.

Πιθανότητα σφάλματος τύπου II β

Είναι σημαντικό ότι κατανοούμε τη σχέση μεταξύ τύπου ι και τύπου II λάθη? δηλαδή, πώς υπολογίζεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II και την ερμηνεία του.

Ανάκληση παραδείγματος 11.1…

$$H_0: \mu = 170$$

$$H_1: \mu > 170$$

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5% απορρίψαμε την H_0 υπέρ της H_1 αφού ο μέσος του δείγματος (178) ήταν μεγαλύτερος της κριτικής τιμής του $\bar{x}$ (175.34).

Πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ β

Ένα σφάλμα τόπου ΙΙ συμβαίνει όταν μια ψευδής μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

Στο παράδειγμα 11.1σημαίνει ότι εάν το $\bar{x}$ είναι μικρότερο του 175.34 (η κριτική τιμή) τότε δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση το οποί σημαίνει ότι δεν θα εισάγουμε το νέο σύστημα λογαριασμών

Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\beta = P(\bar{x} < 175.34 \text{ δεδομένου ότι η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής})$$

Παράδειγμα 11.1 (επανεξέταση)

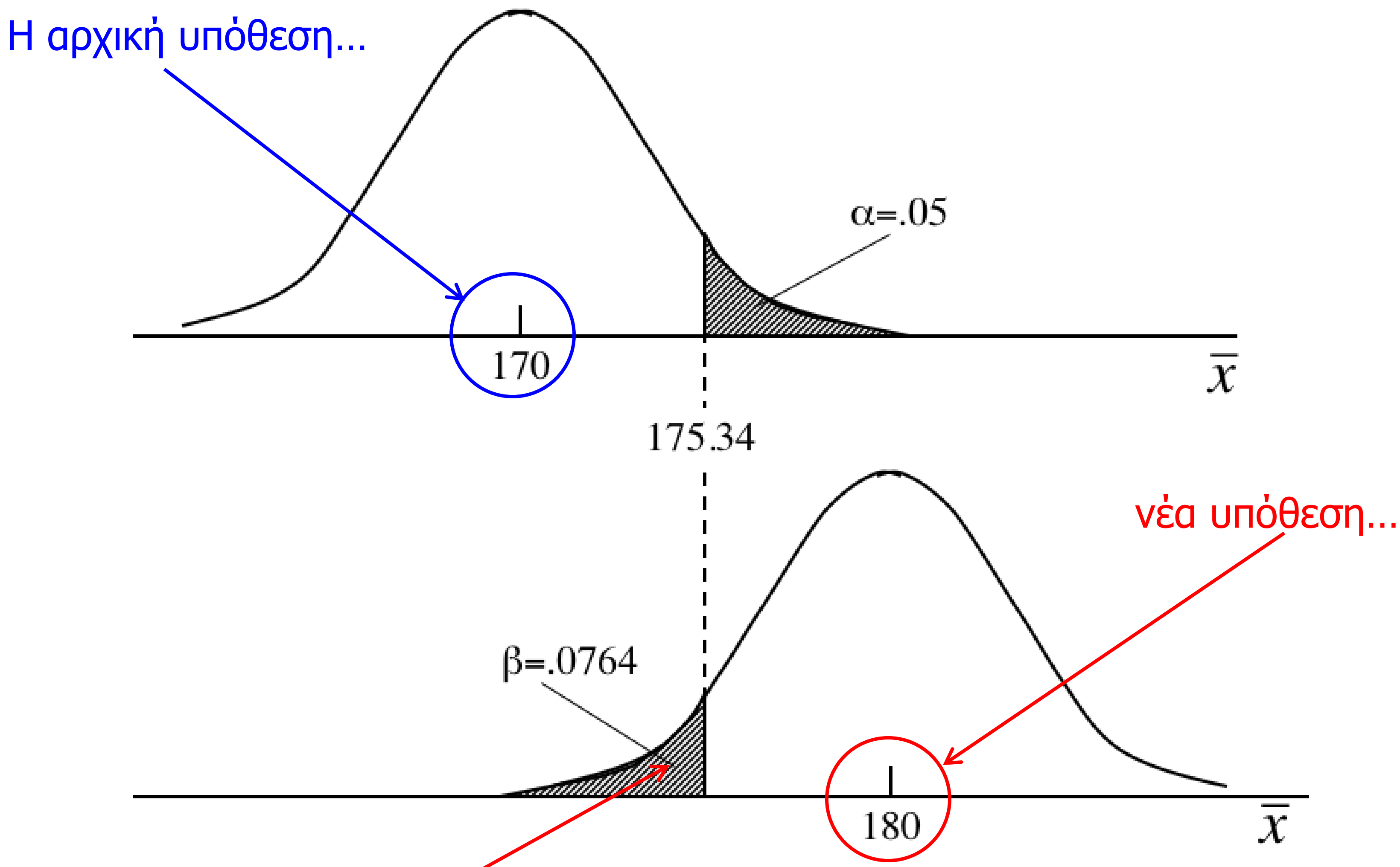
$\beta = P(\bar{x} < 175.34$ δεδομένου ότι η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής)

Η συνθήκη της παραπάνω δεσμευμένης πιθανότητας αναφέρει απλά ότι ο πληθυσμιακός μέσος $\mu \neq 170$. Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα β θα πρέπει να επιλέξουμε μια νέα τιμή για την πληθυσμιακή παράμετρο μ. Ας υποθέσουμε, ότι ο μέσος μηνιαίος λογαριασμός των πελατών είναι \$180 τότε το όφελος από το νέο σύστημα τιμολόγησης θα ήταν πολύ επικερδές και θα επιβαλλόταν η εισαγωγή του.

$\beta = P(\bar{x} < 175.34$, δεδομένου ότι $\mu = 180$), συνεπώς…

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{175.34-180}{65/\sqrt{400}}\right) = P(Z < -1.43) = .0764$$

Παράδειγμα 11.1 (επανεξέταση)



$$\beta = P(\bar{x} < 175.34, \text{ given that } \mu = 180)$$

Ο δρόμος μπροστά μας

ICI προσέγγιση

Identify ‘καθορισμός’

Compute ‘υπολογισμός’

Interpret ‘ερμηνεία’

το πιο δύσκολο μέρος της στατιστικής (στην πραγματική ζωή και στις τελικές εξετάσεις) είναι να προσδιοριστεί η σωστή τεχνική.

Ο δρόμος μπροστά μας

Υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που προσδιορίζουν την σωστή τεχνική. Τα δύο πρώτα είναι:

1. Είδος δεδομένων

   διαστήματος, ιεραρχικά, ονομαστικά

2. Στόχος του προβλήματος

Στόχος του προβλήματος

1. Περιγραφή πληθυσμού
2. Σύγκριση δύο πληθυσμών
3. Σύγκριση δύο ή περισσότερων πληθυσμών
4. Ανάλυση της σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών
5. Ανάλυση της σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών

Πινάκας 11.2

Σκοπός προβλήματος	Ονομαστικα	Ιεραρχικά	Διαστήματος
Περιγραφή πληθυσμού	12.3. 15.1	N/C	12.1, 12.2
Σύγκριση δύο πληθυσμών	13.5, 15.2	19.1, 19.2	13.1, 13.3,13.4, 19.1, 19.2
Σύγκριση δύο ή Περισσότερων πληθυσμών	15.2	19.3, 19.4	Chapter 14 19.3, 19.4
Ανάλυση σχέσεων μεταξύ δυο μεταβλητών	15.2	19.5	Chap 16
Ανάλυση σχέσεων μεταξύ δυο ή περισσότερων μεταβλητών	N/C	N/C	Chapters 17, 18

ΣΥΝΟΨΗ

1. Παράγοντες είναι αυτοί που καθορίζουν ποια παράμετρος μας ενδιαφέρει (π.χ. μ)
2. Κάθε παράμετρος έχει ένα "καλύτερο" εκτιμητή (στατιστική) (π.χ. $\overline{x}$)
3. Ο εκτιμητής (στατιστική) έχει μια κατανομή της δειγματοληψίας. (π.χ.)

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

4. Ο τύπος που αντιπροσωπεύει την κατανομή της δειγματοληψίας είναι συχνά και ο τύπος για το στατιστικό αποτέλεσμα του ελέγχου.
5. Το διάστημα εμπιστοσύνης ενός εκτιμητή προκύπτει από την κατανομή δείγματος.

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$